

JOÃO FERNANDO CUSTODIO DA SILVA

A Inferência Bayesiana e
a Detecção e Localização Automática de Erros Grosseiros
em Fototriangulação por Feixes de Raios

Tese apresentada ao Curso de Pós- Gradua-
ção em Ciências Geodésicas da Universi-
dade Federal do Paraná, para obtenção do
grau de Doutor em Ciências.

CURITIBA


1987

A INFERÊNCIA BAYESIANA E
A DETECÇÃO E LOCALIZAÇÃO AUTOMÁTICA DE ERROS GROSSEIROS
EM FOTOTRIANGULAÇÃO POR FEIXES DE RAIOS

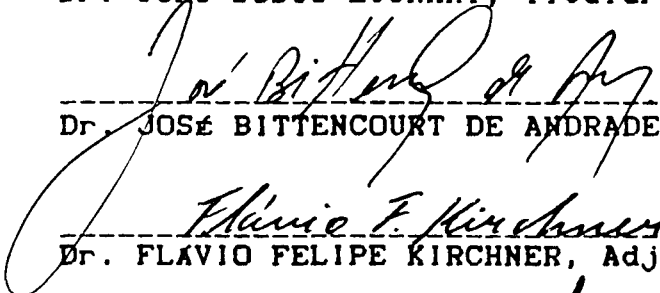
por

JOAO FERNANDO CUSTODIO DA SILVA

Tese aprovada como requisito parcial
para obtenção do grau de Doutor em
Ciências no Curso de Pós-Graduação
em Ciências Geodésicas da Universida-
de Federal do Paraná, pela Banca Exa-
minadora formada pelos professores:



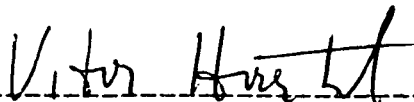
Dr. JOAO BOSCO LUGNANI, Titular-UFPr, orientador



Dr. JOSÉ BITTENCOURT DE ANDRADE, Titular-UFPr



Dr. FLAVIO FELIPE KIRCHNER, Adjunto-UFPr



Dr. VÍTOR FRANCISCO DE ARAÚJO HAERTEL, Adjunto-UFRGS



Dr. DENIZAR BLITZKOW, Assistente-Doutor - USP

Curitiba, 30 de junho de 1987.

DEDICATÓRIA

dos pais, a vida
dos irmãos, a amizade
da esposa, o amor

AGRADECIMENTOS

O autor agradece sinceramente a

O Prof. Dr. João Bosco Lugnani, cuja orientação, paciência, disponibilidade, encorajamento, crítica e, sobretudo, amizade fizeram este trabalho evoluir.

O Prof. Dr. Camil Gemael, pela idealização, realização e dedicação ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, sem o qual esta tese não seria possível.

Os professores, colegas e amigos do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, pelo excelente ambiente de trabalho e convivência.

O Departamento de Cartografia do IPEA/UNESP, Presidente Prudente-SP, pela concessão do período de afastamento necessário à realização desta empreitada.

O diretor, funcionários e estagiários do Centro de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Paraná, pelo apoio e facilidade de acesso às dependências.

O Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq, pelo apoio financeiro.

Os amigos curitibanos, que bem sabem acolher os que aqui chegam.

CONTEÚDO

TERMO DE APROVAÇÃO	ii
DEDICATÓRIA	iii
AGRADECIMENTOS	iv
CONTEÚDO	v
LISTA DE TABELAS	vii
LISTA DE ILUSTRAÇÕES	viii
LISTA DE SIGLAS, ABREVIATURAS E SÍMBOLOS	ix
RESUMO	x
SUMMARY	xii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Problemas com erros grosseiros.	2
1.2 Inferência bayesiana	5
1.3 Objetivos da tese	9
2 A DETECÇÃO E A LOCALIZAÇÃO DE ERROS GROSSEIROS	10
2.1 Erros grosseiros	10
2.2 Confiabilidade	12
2.3 Filtragem progressiva.	13
2.4 Métodos estatísticos para DLAEG	15
2.4.1 Teste do resíduo padronizado.	15
2.4.2 Teste do resíduo padronizado aproximado	17
2.5 Combinação de métodos.	20
2.6 A situação-problema e a contribuição desta pesquisa	21
3 A INFERÊNCIA BAYESIANA E O AJUSTAMENTO GENERALIZADO	25
3.1 Fundamentos da inferência bayesiana	25
3.2 Fundamentos do ajustamento generalizado.	32
3.3 O problema do controle: inferência bayesiana e ajustamento generalizado.	37
4 METODOLOGIA EXPERIMENTAL	40
4.1 Elaboração e teste do programa computacional	40
4.2 Simulação de um bloco de feixes	41
4.3 Solução bayesiana	44
4.4 Teste estatístico para erros grosseiros.	44
4.5 Erro médio quadrático e desvio-padrão estimado	46
5 RESULTADOS E DISCUSSÃO	48
5.1 Experimentos preliminares	49
5.2 Da DLAEG em fotocoordenadas.	52
5.2.1 Resultados sem erros grosseiros.	53
5.2.2 Resultados com erros grosseiros.	54
5.2.2.1 Com VEG pequeno (6σ) e aumento da VPP	54
5.2.2.2 Com VEG médio (18σ) e aumento da VPP	55
5.2.2.3 Com VPP pequena e aumento do VEG	56
5.2.2.4 Com VPP grande e aumento do VEG	56
5.2.3 Resumo da discussão.	57
5.3 Da precisão externa das coordenadas de pontos-objeto.	58
5.3.1 Resultados sem erros grosseiros.	59

5.3.2	Resultados com erros grosseiros.	62
5.3.2.1	A razão EMQ/DPE em função da QEG.	62
5.3.2.2	A razão EMQ/DPE em função do VEG.	65
5.3.2.3	A razão EMQ/DPE em função da VPP.	69
5.3.3	Resumo da discussão.	73
6	CONCLUSÕES & RECOMENDAÇÕES.	75
6.1	Conclusões	76
6.2	Recomendações	77
	APÊNDICE A	79
	APÊNDICE B	81
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.	84

LISTA DE TABELAS

Tab. 3.1: "Quase-observação" - peso versus qualidade . . .	39
Tab. 5.1: Síntese dos resultados dos experimentos realizados	53
Tab. 5.2: Síntese dos EMQ e DPE das coordenadas de pontos- objeto	60
Tab. 5.3: Síntese dos EMQ-X e Y em unidades de σ e EMQ-Z . em % Hv.	60

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Fig. 1.1: Distribuição uniforme ou retangular.	3
Fig. 3.1: Ilustração do conceito de inferência bayesiana .	28
Fig. 4.1: Esquema dos pontos-objeto e do nadir das fotos .	42
Fig. 4.2: Ocorrência de eg nas componentes das fotocoordenadas.	43
Fig. 4.3: Fluxograma abreviado dos principais passos da solução	45
Fig. 5.1: Esquema das características dos experimentos realizados	48
Fig. 5.2: Discrepâncias em Z nos 25 pontos-objeto	61
Fig. 5.3: A razão EMQ/DPE em função da QEG	63
Fig. 5.4: A razão EMQ/DPE em função do VEG	66
Fig. 5.5: A razão EMQ/DPE em função da VPP	70

LISTA DE SIGLAS, ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

DLAEG	Detecção e localização automática de erros grosseiros
DPE	Desvio-padrão estimado
EMQ	Erro médio quadrático
eg	Erro grosseiro
GO...G4	Grupos de experimentos realizados
MVC	Matriz Variância-Covariância
NI	Número (quantidade) de iterações
QEG	Quantidade de erros grosseiros
VEG	Valor do(s) erro(s) grosseiro(s)
VPP	Variância prévia dos parâmetros
VUP	Variância da unidade de peso
cf.	Confira
A'	Transposta de matriz
σ	Desvio-padrão das observações
$\hat{\sigma}_v$	Desvio-padrão estimados para os resíduos
σ_0^2	VUP
χ^2	"qui" quadrado

RESUMO

A fototriangulação por feixes de raios é um método fotogramétrico analítico para determinar as coordenadas de pontos do espaço-objeto e suas respectivas precisões, a partir de observações realizadas no espaço-imagem (fotografias). Este método, geralmente, envolve um grande número de observações e parâmetros. Raramente, na prática, as fototriangulações são realizadas sem que informações indesejáveis (erros grosseiros) perturbem a solução. É necessário, portanto, estabelecer um sistema para controlar automaticamente a qualidade da solução, que seja capaz de detectar e eliminar erros grosseiros. Apesar do adiantado estágio em que se encontra a detecção de erros grosseiros, a Sociedade Internacional de Fotogrametria e Sensoriamento Remoto recomenda a continuidade das pesquisas.

A inferência bayesiana, aliada à técnica da filtragem progressiva, permite vislumbrar uma possibilidade para aumentar a eficiência e a confiabilidade da fototriangulação, melhorar a estimativa de parâmetros, proporcionar um controle efetivo das informações (observações), melhorar a detecção e eliminação de erros grosseiros e fortalecer a rigidez do bloco para aumentar a economia com relação a pontos-de-controle. Os objetivos desta tese são a verificação destas possibilidades.

A metodologia para atingir os objetivos propostos consiste na simulação de uma rede de 25 pontos-objeto, a partir dos quais é gerado um bloco de fotografias aéreas. As fotocoordenadas são alteradas para conter erros randômicos e

posteriormente até dez erros grosseiros. O ajustamento de observações por mínimos quadrados, baseado no conceito da inferência bayesiana, é realizado. O método de Pope é usado para detectar e eliminar erros grosseiros.

Os experimentos e respectivos resultados são apresentados, analisados e discutidos, de modo a permitir conclusões e recomendações.

SUMMARY

The bundle method is an analytical photogrammetric approach to determine coordinates of the object points and their precision, from observations made on image space (photos). Generally, this method involves a great number of observations and parameters. Rarely, in practice, the work is done without undesirable gross errors in the data, which disturb the solution. Therefore, it is necessary to set up automatic quality control of solution, which is able to detect and eliminate those blunders. In spite of the developed stage of gross error detection techniques, the International Society of Photogrammetry and Remote Sensing recommends to continue the researches.

The Bayesian inference along with the step-by-step technique allows to foresee a possibility to increase the efficiency and reliability of phototriangulation, to improve the parameters estimation, and to provide an effective control of data. It also appears to improve the gross error detection and elimination, and strengthen the block, in order to increase the economy, with respect to control points. The objectives of this thesis are the verification of those possibilities.

The used methodology to reach the proposed objectives consists on simulation of a 25 object points mesh, from which a block of aerial photos is generated. Ideal photocoordinates are computed, then they are changed to involve random errors, and in a subsequent step up to ten gross errors are introduced

to them. The least squares adjustment of observations, based on concept of Bayesian inference, is made. The Pope's method is used to detect and eliminate gross errors.

The experiments and corresponding results are presented, analysed and discussed, in order to draw conclusions and recommendations.

A fototriangulação por feixes de raios é um método fotogramétrico analítico para determinar coordenadas de pontos do espaço-objeto e suas respectivas precisões, a partir de observações realizadas no espaço-imagem (fotografias). Geralmente, a quantidade de observações é elevada e não raro algumas são afetadas por erros grosseiros. A necessidade de estimar uma certa quantidade de parâmetros requer uma quantidade maior de equações. Isto conduz ao campo da inferência estatística. Seja através da inferência estatística clássica ou da inferência bayesiana, a qualidade das estimativas (imparciais e de variância mínima) dos parâmetros depende da confiabilidade do sistema de fototriangulação. Através da detecção e localização automática de erros grosseiros, espera-se obter melhoria da confiabilidade e consequentemente estimativas imparciais e de variância mínima dos parâmetros, que são as duas qualidades principais requeridas para os estimadores.

A questão DLAEG (detecção e localização automática de erros grosseiros) em fototriangulação preocupa a comunidade fotogramétrica a nível internacional. A "ISPRS" (International Society for Photogrammetry and Remote Sensing), em 1980, instituiu um grupo de trabalho (WG-III/1) com a finalidade de incentivar a pesquisa para melhorar a confiabilidade dos sistemas de fototriangulação, através da DLAEG. Os resultados obtidos através de um programa experimental, conduzido pelo referido grupo de trabalho, sugerem a continuidade dos esforços (ACKERMANNI 21).

1.1 Problemas com erros grosseiros

Erro grosseiro (eg), neste contexto, é considerado como uma observação que provavelmente não pertence a uma dada população, segundo a distribuição postulada. É fácil exemplificar a ocorrência de um eg em problemas univariados: na determinação do comprimento de uma base, o simples ordenamento (estatística de ordem) dos valores observados indica, em uma inspeção visual, de quanto os valores extremos diferem da mediana (estimador robusto). Por outro lado, em fototriangulação, um caso de problema multivariado, a ilustração é complexa. Considerando-se um bloco de fotografias com superposição longitudinal e lateral, um ponto-objeto terá imagens em pelo menos duas fotografias. Um eg cometido na medição de fotocoordenadas tem sua influência propagada sobre os parâmetros de posição e orientação das fotos, bem como sobre as coordenadas de pontos do espaço-objeto. Na solução de mínimos quadrados, a presença de erros grosseiros afeta as estimativas de valores mais prováveis dos parâmetros, tornando-as tendenciosas, isto é, $E(x) \neq x$. Esta tendenciosidade está intimamente relacionada ao conceito de precisão externa.

A aproximação ocorrida, quando da linearização das equações de colinearidade pelo uso da série de Taylor, requer iterações para solucionar o problema do ajustamento. Esta solução é alcançada quando os valores atuais dos parâmetros diferem dos anteriores de uma quantidade inferior a uma quantidade arbitrada. Na presença de eg, a convergência pode ser impedida, dependendo das condições em que eventualmente o(s) eg(

8) venha(m) ocorrer. De modo geral, a não-convergência da solução, para um dado número de iterações permitidas, pode acontecer quando houver ϵ_g de grande magnitude (p.ex., troca de pontos, erro de milímetros nas fotocoordenadas) ou quando houver grande quantidade de ϵ_g (mais de 5%) nas observações. Entretanto, na maior parte dos casos, as soluções de convergência são obtidas e, daí, recai-se no problema da tendenciosidade dos parâmetros, mencionado no parágrafo anterior.

Em problemas de aerotriangulação analítica, geralmente a quantidade de observações e parâmetros é elevada. À medida que aumentam as dimensões de um bloco de fotografias, aumentam os graus de liberdade ($n-u$, isto é, número de observações menos o número de parâmetros). O crescimento dos graus de liberdade ($n-u$) faz com que a forma da distribuição de χ^2 tenda à forma da distribuição normal. Dependendo da magnitude do ϵ_g , da geometria do problema e do número de graus de liberdade, os efeitos dos ϵ_g espalham-se mais ou menos entre observações e parâmetros. A variância da unidade de peso (VUP) "a posteriori", embora inflacionada, pode não ser rejeitada no teste de hipóteses para a igualdade entre variâncias "a priori" e "a posteriori". Resultados práticos têm alertado para esta possibilidade. Em outras palavras, o teste de χ^2 , para a VUP, não tem sensibilidade para todos os tipos de ϵ_g .

Relembrando, a igualdade entre as mencionadas VUP's é postulada na forma de uma hipótese básica, que pode ser rejeitada em um teste estatístico, baseado na distribuição χ^2 (teste de χ^2). As causas da falha do teste de χ^2 podem ser:

(a) os resíduos v 's não seguem a distribuição normal,

- (b) o modelo matemático está incorreto,
- (c) presença de erros sistemáticos nas observações (por isto diz-se que o modelo matemático funcional está incompleto ou incorreto),
- (d) incorreta atribuição de pesos (ou da matriz variância-covariância) às observações e/ou
- (e) presença de eg nas observações.

A rejeição da hipótese H_0 remete o investigador à avaliação dos itens (b), (c) e (d). No caso da fototriangulação por feixes de raios, não há dúvida que a equação de colinearidade é o modelo funcional adequado. Um pré-refinamento apropriado minimiza satisfatoriamente os erros sistemáticos e, usando a sua experiência, o investigador consegue ponderar adequadamente as observações em função dos métodos e equipamentos utilizados na redução dos dados. Feitas estas considerações, quando o teste falha, isto é, indica rejeição de H_0 , por exclusão, admite-se que os resíduos não seguem a distribuição normal, provavelmente, pela presença de possíveis eg nas observações. Entretanto, a rejeição da H_0 apenas indica que há eg nas observações (detecção), mas não aponta onde está (localização).

Em suma, o teste de χ^2 em questão tem poder limitado de detectar a presença de eg nas observações, mas não tem poder de localizá-los.

Por estas razões, outros testes estatísticos específicos para detectar e localizar erros grosseiros foram desenvolvidos, dentre os quais destacam-se: o "data snooping", tam-

bém conhecido como método de Baarda, o qual originalmente foi proposto para ser aplicado após a falha do teste de , para a igualdade das VUP "a priori" e "a posteriori"; atualmente, em fototriangulação, este método é empregado independente da realização do teste de χ^2 ; o método de Pope, o qual pode ser considerado como uma versão simplificada do método de Baarda e o "danish method", referido também como método de Krarup, o qual associa pesos menores a observações que apresentam resíduos maiores. Todos estes métodos pressupõem a convergência da solução de ajustamento.

Ainda que considerável avanço tenha sido conseguido, à custa do esforço da comunidade fotogramétrica, a questão DLAEG parece não estar suficientemente resolvida. Os debates havidos nos últimos simpósios e congressos (ACKERMANN 1 21,1 31, EL-HAKIM 1141, FORSTNER 1171, KRARUP & KUBIK 1331) evidenciam a atualidade do tema, bem como a necessidade de prosseguir na busca de aprimoramentos ou mesmo novos procedimentos para melhorar a confiabilidade da fototriangulação.

1.2 Inferência bayesiana

Em geral, os parâmetros a serem determinados em fototriangulação são considerados previamente desconhecidos. Em outras palavras, os parâmetros são variáveis algébricas com flutuações probabilísticas dependentes das observações e dos modelos funcional e estocástico. Adotando-se o modelo de Gauss-Markov, para exemplificar,

$$y = Ax + l \quad , \quad P = \sigma_0^2 . I$$

$$x_2 = -(A'PA)^{-1} . A'Pl \quad (1.1)$$

a (1.1) representa a solução para o vetor de parâmetros x . Neste caso, foi declarado implícita e previamente, que nada se conhecia sobre os parâmetros da distribuição do vetor x . Ou seja, antes da realização do ajustamento, o estado de informação a respeito dos parâmetros era de ignorância absoluta.

Por outro lado, admitir completa ignorância sobre o estado de parâmetros é, de certo modo, um desperdício. O investigador dispõe ao menos de uma vaga noção sobre seus intervalos de existência. O processo pelo qual este conhecimento prévio é introduzido na solução de estimativas de parâmetros é estudado pela inferência bayesiana. A estimativa bayesiana conduz a uma nova distribuição dos parâmetros, ainda que de mesma natureza, partindo de uma distribuição prévia e considerando a ocorrência de um dado evento. Este enfoque é devido a Thomas Bayes, que, em 1763, apresentou um teorema, hoje consagrado como Teorema de Bayes, cuja formula é a seguinte:

$$p(x|l) = [p(l|x) * p(x)] / \sum_i [p(l|x_i) * p(x_i)] \quad , \quad (1.2)$$

onde $p(x|l)$ é a probabilidade condicional de ocorrer x (parâmetros), tendo ocorrido o evento l (observações). $p(x)$ é a probabilidade prévia do vetor x , denotando o conhecimento prévio do estado do vetor x , antes que seja realizada a inferência. $p(l|x)$ é a probabilidade condicional das observações as-

sociada à expectativa do resultado do experimento (BEKMAN & COSTA NETO | 51, BOSSLER | 71). O denominador da fórmula é um somatório de probabilidades condicionadas, representando, portanto, apenas um fator de normalização.

Assume-se que P_X represente a matriz dos pesos dos parâmetros e que $p(x)$ relaciona-se aos elementos da diagonal principal de P_X . Desde que esta matriz seja definida a partir da MVC dos parâmetros, sabe-se que a um valor de variância menor associa-se um valor de probabilidade maior e, portanto, um peso maior. Observar que $p(x)$ é distinta de P_X .

A atribuição de valores a P_X é a questão fundamental do teorema. Aqui se dividem os estatísticos. $P_X = 0$ implica ignorar o estado prévio dos parâmetros. Isto significa que o valor ajustado dos parâmetros depende apenas de informações objetivas, caracterizando a ausência do sujeito-pesquisador (Estatística clássica - Escola de Neyman-Pearson). Se $P_X \neq 0$, o pesquisador interfere no processo estatístico da inferência escudado na sua experiência (Estatística bayesiana - Escola de Dayes). À primeira vista, esta interferência é condenável.

Entretanto, veja-se a seguinte situação: seja um bloco de fotografias verticais. Na realidade admitem-se pequenas rotações aos ângulos ω e ϕ , até no máximo 30° . Sendo assim, por quê não admitir que tais ângulos de todas as fotografias, "a priori", têm média 0° e desvio-padrão de cerca de 2° ? Ou ainda, assumir uma distribuição uniforme ou retangular (fig. 1.1), tal que

$$\text{se } \text{ângulo} = |20| \Rightarrow P_X(\text{âng}) = k$$

$$\text{se } \text{ângulo} > |20| \Rightarrow P_X(\text{âng}) \rightarrow 0$$

onde $P_x(\hat{\text{ang}})$ é o peso da variável aleatória ângulo e "k" um valor arbitrário.

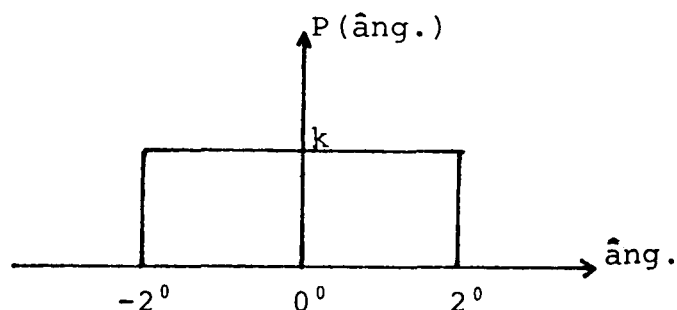


Fig. 1.1: Distribuição uniforme ou retangular

Outra situação comum para respaldar a aceitação das teses bayesianas, refere-se às coordenadas de pontos-objeto do bloco acima. Os próprios valores aproximados necessários para dar partida à solução iterativa do ajustamento da fototriangulação podem ser ponderados. Isto é, podem ser considerados dentro de um intervalo de existência, porque pressupõem "algum tipo de observação" para obtenção de tais valores aproximados.

É sabido que o critério de minimização da soma dos resíduos quadrados para estimar parâmetros não requer o conhecimento ou a postulação de uma distribuição de probabilidades para as variáveis. Já o Teorema de Bayes exige o conhecimento ou a suposição de uma função de distribuição $[p(\underline{1}|\underline{x})]$. Entretanto, é demonstrada a coincidência prática da solução bayesiana com a solução generalizada do ajustamento de observações, evidenciando, portanto, a atualidade do tema.

1.3 Objetivos da tese

1.3.1 Analisar a contribuição da inferência bayesiana em fototriangulação. Dois aspectos serão estudados: a questão DLAEG e a suspensão temporária dos pontos de controle. Para que este objetivo seja alcançado será necessário elaborar um programa computacional de fototriangulação por feixes de raios.

1.3.2 Investigar a aplicação do método de Pope na questão DLAEG, baseada na ausência temporária de pontos de controle.

1.3.3 Estudar a utilização de informações prévias relevantes a respeito dos parâmetros, em situações de mínima quantidade de pontos de controle, como contribuição à rigidez geométrica da rede.

2 A DETECÇÃO E A LOCALIZAÇÃO DE ERROS GROSSEIROS

A questão DLAEG há alguns anos vem tomando a atenção da comunidade fotogramétrica. A grande quantidade de dados processados em fotogrametria analítica requer um conjunto de algoritmos capaz de depurar os dados o mais rápido possível. Da eficiência destes algoritmos, no sentido da capacidade de detectar e localizar eg, depende a confiabilidade. As pesquisas realizadas recomendam a técnica da filtragem progressiva, a qual pode ser entendida como uma sequência de algoritmos que vão se capacitando mais para detectar e localizar eg cada vez menores, à medida que vão se sucedendo as etapas de depuração.

2.1 Erros grosseiros

Geralmente, os eg são associados a valores extremos de uma distribuição ordenada. Recusar as duas observações extremas (a menor e a maior) intuitivamente significaria uma protecção contra observações possivelmente inconsistentes. Outra opção seria recusar apenas a observação mais afastada em relação à mediana. Aproveitando ainda a ideia, outra possibilidade seria calcular a média aritmética simples e eliminar a observação que apresentar o maior resíduo em valor absoluto. Embora, este último caso não represente um caso de distribuição ordenada, a rejeição da observação associada ao maior módulo de resíduo significa rejeitar o extremo da distribuição. Estatisticamente, diz-se que os eg correspondem a observações

que não podem ser consideradas pertencentes à população da distribuição em questão.

Os eg em fototriangulação repercutem nas coordenadas de pontos-imagem (fotocoordenadas) ou nas coordenadas de pontos-objeto (pontos de controle) em diferentes intensidades. Os eg nas coordenadas do espaço-imagem resultam da troca de numeração (rotulação) de pontos ou da troca de dígitos na descrição do valor da coordenada ou ainda devido a dificuldades na identificação do ponto-imagem, resultando em erro de pontaria. Quanto aos pontos de controle, a rotulação indevida e também a permutação de dígitos nas coordenadas produzem os eg. Ocasionalmente, pode haver pontos sem rótulos e vice-versa. Estas falhas nos dados também podem repercutir nas coordenadas, seja de pontos-imagem, seja de pontos-objeto.

Em termos de fotocoordenadas, quantificar o tamanho do eg é algo a que poucos se arriscam, porque os modelos teóricos (estatísticos) para eg respondem variavelmente em função dos parâmetros do projeto. Na prática, entretanto, erros superiores a 6σ (seis desvios-padrões) podem ser identificados como eg. Em relação aos pontos de controle, a quantificação e a identificação de eg são mais complicadas (ACKERMANN | 31). FORSTNER [18] estabelece que grandes eg são superiores a uma fotobase (" b "), médios eg estão compreendidos entre 20σ e $1b$, inclusive, e pequenos eg estão entre 4σ e 20σ , inclusive.

Para que a depuração dos dados (observações e informações adicionais) seja a mais rápida possível e do maior para o menor eg, há vários meios que podem ser empregados, tais como: leituras repetidas, verificação da consistência, pontaria

cuidadosa, registro automático; verificação periódica da "performance" do equipamento; aplicação de algoritmos algébricos e/ou geométricos simplificados; finalmente, a análise automática de resíduos, após o ajustamento das observações, e a indispensável análise crítica do investigador.

O resultado de uma fototriangulação depurado por estes meios goza de maior confiabilidade.

2.2 Confiabilidade

O termo confiabilidade relaciona-se à qualidade do ajustamento com respeito à detecção de erros. Tais erros podem ser grosseiros ou sistemáticos. Os erros sistemáticos estão diretamente relacionados à adequação do modelo funcional. Isto é, o modelo funcional "ideal" compensa totalmente os erros sistemáticos do conjunto. A presença de erros sistemáticos significa, então, que o modelo funcional não tem capacidade para representar a realidade. Ou, em outras palavras, a aproximação é insuficiente. Assim, confiabilidade é entendida como a habilidade em eliminar eg das observações, quando estimando parâmetros incógnitos, com a ajuda de um teste estatístico. Neste contexto, é designada como confiabilidade interna. Uma medida da confiabilidade interna é dada pelo eg_i a ser detectado pelo teste estatístico na observação l_i . A confiabilidade externa é descrita pela influência de erros não detectáveis sobre as coordenadas-objeto. Assume-se que um teste estatístico tenha sido aplicado e todos os resíduos padronizados si-

tuem-se abaixo de um valor crítico, o qual depende do nível de significância do teste (FORSTNER 1161, GRUN 1221, KOCH 1301).

Atualmente, confiabilidade é usada, principalmente, com respeito à DLAEG, desde que um sofisticado modelo de auto-calibração proporcione a compensação de erros sistemáticos e as estimativas de pesos sejam adequadas (GRUN 1231). No presente trabalho, é dispensável o modelo de refinamento de auto-calibração, porque as fotocoordenadas, consideradas independentes, foram geradas para conter apenas erros randômicos normalmente distribuídos e sob variância conhecida, o que afasta dúvidas quanto à estimativa dos pesos.

A utilidade de ambos os conceitos de confiabilidade (interna e externa) é perceptível, quando há mais de um eg no conjunto das observações. Se H_0 for falsa e o teste estatístico falhar, isto é, ocorrer o erro tipo II, o significado é que, embora o ajustamento tenha um certo grau de confiabilidade interna (o valor crítico), pelo menos um eg não detectado está presente nas observações. Neste caso, a investigação da confiabilidade externa indica o efeito deste eg sobre as coordenadas de pontos-objeto.

2.3 Filtragem progressiva

Atualmente, esta é a técnica recomendada para a DLAEG em fototriangulação. Desconsiderando algumas pequenas variações, a filtragem progressiva resume-se nos seguintes passos:

(a) transformação afim das coordenadas de máquina para o sistema fiducial: verifica-se a consistência das observações no âmbito da fotografia;

(b) transformação ortogonal entre duas fotos adjacentes na faixa: verifica-se a consistência dos dados (rotulação e coordenadas) de pontos homólogos;

(c) formação analítica de faixas, concatenando sequencialmente os modelos: verifica-se a consistência das fotocoordenadas-y a cada modelo concatenado; o procedimento alternativo é a formação da faixa a partir de triplas: verifica-se a consistência das fotocoordenadas-x e y a cada tripla;

(d) transformação de similaridade entre duas faixas adjacentes formadas analiticamente em (c): verifica-se a consistência dos dados de pontos de enlace;

(e) transformação de similaridade da faixa para o espaço-objeto: verifica-se a consistência dos dados de pontos de controle; este procedimento depende da distribuição dos pontos de controle. É possível também a transformação de um bloco (formado em (d), p. ex.) e

(f) ajustamento simultâneo do bloco de feixes, com algoritmo detector de eg baseado em teste estatístico.

2.4 Métodos estatísticos para DLAEG

Após a filtragem progressiva, é razoável supor que os possíveis eg remanescentes sejam de menores magnitudes. A cada passo deste processo a confiabilidade do sistema aumenta, porque aumenta a capacidade de detectar e eliminar eg cada vez menores. Abaixo de um certo valor, os eg só podem ser localizados mediante testes estatísticos em um certo nível de significância. Portanto, há uma probabilidade de falha do teste, mas é o último recurso para a depuração automática no sistema.

2.4.1 Teste do resíduo padronizado

Realizado o ajustamento por mínimos quadrados, após a filtragem progressiva, os resíduos estão disponíveis para a análise estatística. Considerando que o resíduo mostra apenas uma parte do erro da observação, proporcional à redundância geométrica no ponto, uma palavra deve ser dita sobre o relacionamento entre o vetor de resíduos (y) e o vetor de observações (l).

Demonstra-se que (cf. APÊNDICE A)

$$y = Q_{VV} \cdot P \cdot l \quad (2.1)$$

O eg_i na observação l_i provoca uma variação dv_i no resíduo v_i

$$(v + dv)_i = (Q_{VV} \cdot P)_i \cdot (1 + e)_i \quad (2.2)$$

Os elementos diagonais do produto matricial $Q \cdot P$ são denominados números de redundância r_i (i denotando o i -ésimo elemento diagonal), cujos valores existem entre 0 e 1, inclusive os extremos.

$$(v + dv)_i = r_i \cdot (1 + e)_i \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (2.3)$$

Percebe-se, então, que se $r_i = 0$ o erro e_i não será mostrado pelo resíduo v_i e se $r_i = 1$ todo o erro e_i estará presente no resíduo v_i . Isto é explicado através da matriz Q_{VV} .

$$Q_{VV} = Q_{11} - AN^{-1}A' \quad (2.4)$$

O termo $AN^{-1}A'$ é interpretado como a contribuição geométrica para a dispersão dos resíduos. O desvio-padrão (σ_{v_i}) do resíduo v_i é estimado por

$$\hat{\sigma}_{v_i} = (\sigma_0^2 \cdot q_i)^{1/2}$$

σ_0^2 , a variância de referência e q_i , o i -ésimo elemento diagonal de Q_{VV} . O resíduo padronizado correspondente é

$$\hat{w}_i = |v_i| / \hat{\sigma}_{v_i} \quad (2.5)$$

o qual é testado contra um valor calculado "c", tal que $c = t_{n,\alpha} = [(F_{1,n;\alpha})]^{1/2}$

O teste é bi-caudal e o resíduo é rejeitado se $w_i > c$. A rejeição do resíduo estende a rejeição à observação.

O resíduo padronizado \hat{w}_i recebe a influência global do ajustamento, quando σ_0^2 é estimada "a posteriori"; recebe também a influência da precisão da observação (σ_i^2 em Q_{11}) e a influência da geometria da rede (q_i). Por isto, nem sempre o maior resíduo $|v_i|$, em valor absoluto, corresponde a uma observação inconsistente.

2.4.2 Teste do resíduo padronizado aproximado

O cálculo do desvio-padrão $\hat{\sigma}_{v_i}$ do resíduo v_i é uma tarefa computacionalmente dispendiosa, a qual tem sido sistematicamente evitada pelos programas computacionais de fototriangulação a nível de produção. Um procedimento visando o cálculo do desvio-padrão aproximado $\tilde{\sigma}_{v_i}$ do resíduo v_i é apresentado (POPE 1441).

Seja o modelo linearizado $y = Ax + l$

$$x = -(A'PA)^{-1}A'Pl \quad , \quad N=A'PA$$

$$y = l - AN^{-1}A'Pl = (I - AN^{-1}A'P).l$$

$$y = (I - G.P).l \quad , \quad G=AN^{-1}A' \quad (2.6)$$

$$y = M.l \quad , \quad M=I-G.P \quad (2.7)$$

Aplicando a propagação de covariâncias à (2.6), obtém-se:

$$C_V = C_1 - \sigma_0^2 \cdot AN^1 A' \quad (2.8)$$

Supondo que C_1 seja diagonal

$$C_1 = \sigma_0^2 \cdot P^{-1}$$

$$C_V = \sigma_0^2 \cdot (P^{-1} - AN^1 A') = \sigma_0^2 \cdot (P^{-1} - G) \quad (2.9)$$

Adaptando a (2.9) à forma algébrica, a partir da suposição de independência estatística, obtém-se

$$\tilde{\sigma}_{V_i}^2 = (\sigma_0^2/p_i) \cdot (1 - g_i \cdot p_i) = (\sigma_0^2/p_i) \cdot m_i \quad (2.10)$$

Considerando-se que as variâncias, os pesos p_i e os elementos diagonais g_i são valores não-negativos, pode-se concluir que qualquer elemento m_i da diagonal principal de M existe no intervalo $0 \leq m \leq 1$.

O resíduo padronizado aproximado correspondente à observação i é $\tilde{w}_i = |v_i|/\tilde{\sigma}_{V_i}$, o qual também é testado contra um valor calculado "c". O valor de "c" agora é obtido da distribuição tau, porque as estimativas do resíduo (média) e do desvio-padrão $\tilde{\sigma}_{V_i}$ não são independentes, como requer a distribuição t de Student; ambas as estimativas são realizadas a partir da mesma amostra, o que caracteriza dependência estatística.

A distribuição tau relaciona-se à distribuição t pela expressão

$$\tau_v^2 = v \cdot t_{v-1}^2 / (v-1 + t_{v-1}^2) \quad ; \quad v = \text{graus de liberdade}$$

A observação correspondente a \tilde{w}_i é rejeitada se $\tilde{w}_i > c$, tal que $c = \tau_v$.

A aproximação do teste está na adoção do valor médio dos m_i , para calcular $\tilde{\sigma}_{v_i}$. Conforme conclusão de POPE, após investigar as propriedades da matriz C_v , a média dos m_i é $\bar{m} = (n-u)/n$.

As observações dos pontos-imagem, quando realizadas com métodos e equipamentos adequados, produzem fotocoordenadas de igual confiança, ou, equivalentemente, de mesmo peso. Daí, justifica-se a adoção de um único valor "p" para exprimir a confiança "a priori" nas observações.

Portanto, o desvio-padrão do resíduo v_i é estimado por

$$\tilde{\sigma}_v = \hat{\sigma}_0 \cdot (\bar{m}/p)^{1/2} \quad (2.11)$$

e o resíduo padronizado aproximado correspondente é estimado por

$$\tilde{w}_i = |v_i| / \tilde{\sigma}_v \quad (2.12)$$

O presente teste estatístico aproximado tem, sobre os testes estatísticos rigorosos (cf. 2.4.1), a vantagem de ser

fácil de implementar e ter baixo custo computacional. Apesar da simplificação ou aproximação, a localização de pelo menos um eg é confiável, ao nível de significância de $\alpha \%$. Aliás, esta confiança existe também para os testes rigorosos, mas quando houver apenas um eg. Do "teste de Pope" espera-se a capacidade de detectar e localizar automaticamente eg de pequena ou média magnitude (cf. 2.1), durante a realização dos cálculos de ajustamento, pressupondo-se que a filtragem progressiva tenha sido realizada. A ressalva mais importante a ser feita é que todos os pontos têm igual tratamento, quanto à redundância geométrica e, por extensão, quanto à estimativa do desvio-padrão do resíduo, a qual passa a ser única (valor médio) para todos os resíduos de observações. Isto talvez possa ser interpretado como uma tentativa de adequar-se a "redundância da rede" ao critério de rejeição do teste estatístico, estabelecendo, ambos, uma marca, acima da qual todos os resíduos (observações) são rejeitados.

2.5 Combinação de métodos

Considerando a filtragem progressiva, tal como apresentada em 2.3, nota-se que os passos antecedentes ao ajustamento do bloco (f) referem-se apenas a transformações de espaços. Estas podem ser feitas diretamente, arbitrando-se os parâmetros, ou simultaneamente, determinando-se os parâmetros da transformação em conjunto com as novas coordenadas. No primeiro caso, da transformação direta, as discrepâncias entre valo-

res observados (esperados) e valores transformados são analisadas, de modo a conduzir à detecção de possíveis eg. No outro caso, da transformação simultânea, os resíduos obtidos nos ajustamentos de cada passo são analisados para detectar possíveis eg nas observações. Em ambos os casos, as análises são visuais, isto é, o investigador necessita de interromper o processo entre os passos para realizar a inspeção dos resultados.

Uma maneira de agilizar este processo e aumentar a confiabilidade é através da automatização das análises. Em outras palavras, combinando-se a técnica da filtragem progressiva com as técnicas estatísticas, a eficiência da depuração pode ser melhorada. Assim, a cada passo da filtragem progressiva um teste estatístico deve ser usado, a fim de auxiliar a DLAEG, principalmente a partir do passo (c). Neste, pode ser útil o método de Baarda ("data snooping") com a variante de manipulação dos pesos (métodos robustos). Nos passos (d) e (e) o método de Krarup (JUHL 1291) parece adequar-se. Nos passos (a) e (b) espera-se a detecção de grandes eg e por isto é desnecessário um teste estatístico (EL-HAKIM & ZIEMANN 1151, JACOBSEN 1271, LUGNANI & MITISHITA 1371,1381).

2.6 A situação-problema e a contribuição desta pesquisa

Durante os anos 60, com o advento dos computadores digitais, iniciou-se a arrancada em direção à modernização dos processos de produção. Era o que faltava para a fototriangula-

ção analítica, até então inibida pela alta demanda computacional. O desafio imediato era o de proporcionar uma solução computacionalmente eficiente para a maior quantidade de dados no menor tempo possível. Desenvolveram-se pois alguns métodos computacionais para otimizar a solução de grandes sistemas de equações lineares.

Consolidada a solução computacional para a fototriangulação, passou-se a pesquisar a melhoria da modelagem matemática. O equacionamento da realidade física, quanto à representação do espaço-objeto, e a adequação do modelo estocástico desafiaram os fotogrametristas até meados dos anos 70.

Ao relatar as atividades da Comissão III durante o período 1972-76, ACKERMANN [101] mencionou que o problema da detecção e localização automática de erros grosseiros (DLAEC) começava a despertar a atenção da comunidade fotogramétrica. Enaltecia ele que este problema tinha relação direta com a qualidade e economia da triangulação. A referida comissão atribuiu ao assunto importância primária.

Realmente, desde então, assistiu-se ao grande esforço de vários fotogrametristas para vencer o desafio estabelecido pela presença de ~~eg~~ nos dados, qual seja o de melhorar a qualidade e aumentar a economia da fototriangulação.

Os recursos atuais geralmente empregados para a depuração da fototriangulação, quanto à presença de ~~eg~~, são:

- (a) a filtragem progressiva (cf. 2.3)
- (b) o método de Baarda ou "data snooping" (cf. 2.4.1)
- (c) o método de Krarup ou "danish method" (cf. 5.1)
- (d) a combinação dos métodos (cf. 2.5)

Até o presente, todo o esforço relativamente bem sucedido na questão DLAEG limita-se às observações do espaço-imagem (fotocoordenadas). Considerando o controle convencional, quando os eg estão presentes nos pontos de controle, os danos causados aos resultados da fototriangulação são maiores, porque a definição do referencial é realizada de modo "grosseiramente" errada. É unanimemente reconhecida a dificuldade de se identificar eg nos pontos de controle (ACKERMANN 1031, MITISHITA 1421). O passo "e" da filtragem progressiva é uma boa opção, mas a eficiência da detecção depende da distribuição e densidade destes pontos e também do tamanho do possível eg. Durante os cálculos do ajustamento da fototriangulação, a identificação de eg em ponto(s) de controle(s) é extremamente difícil.

Diante desta situação, a inferência bayesiana (cf. 3) surge como uma possibilidade de ajustar a fototriangulação sem a necessidade de recorrer ao controle convencional. Os resíduos de fotocoordenadas podem ser analisados estatisticamente sem a influência de possíveis eg nos pontos de controle.

A presente pesquisa aborda a questão DLAEG, de uma maneira um tanto inusitada, ao restringir a liberdade dos parâmetros. Tal restrição deve-se a algum conhecimento prévio a respeito de suas distribuições. Contudo, a utilização da estimativa bayesiana isoladamente é impotente para enfrentar o problema (cf. 5.1), aliás como qualquer outra estimativa. Entretanto, a combinação da estimativa bayesiana com outros recursos existentes sugere a possibilidade de melhorar a confiabilidade da fototriangulação. Neste trabalho é estudado o em-

prego combinado da inferência bayesiana com o método de Pope, após a hipotética realização da filtragem progressiva, baseado na suspensão temporária dos pontos de controle. Esta é a contribuição maior que a presente pesquisa se propõe a oferecer à solução deste importante assunto.

3 A INFERÊNCIA BAYESIANA E O AJUSTAMENTO GENERALIZADO

As estimativas de parâmetros através da inferência bayesiana ou do ajustamento generalizado são formalmente semelhantes. As diferenciações são basicamente conceituais, não interferindo na operacionalização das soluções. Ambos os métodos são considerados, quando se dispõe de algum conhecimento prévio a respeito dos parâmetros. Este conhecimento "a priori" pode ser aplicado em situações de substituição ou complementação de controle convencional das fototriangulações, permitindo uma solução de ajustamento e posterior análise dos resíduos de fotocoordenadas, sem a influência de erros grosseiros nos pontos de controle, possivelmente existentes após a filtragem progressiva.

3.1 Fundamentos da inferência bayesiana

Definições (BEKMAN & COSTA NETO | 51)

3.1.1 Espaço amostral (S): conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

3.1.2 Eventos mutuamente exclusivos (EME): são os que não podem ocorrer simultaneamente em uma mesma realização do experimento.

3.1.3 Probabilidade (p): número real associado a um evento (E) tal que:

(a) $0 \leq p(E) \leq 1$ para todo evento E,

(b) $p(S) = 1$

(c) Se E_1, E_2, \dots, E_n são EME e exaustivos, então

$$p(E_1) \cup p(E_2) \cup \dots \cup p(E_n) = p(E_1) + p(E_2) + \dots + p(E_n) \\ = p(S) .$$

3.1.4 Probabilidade condicional [$p(E|A)$]: a probabilidade de ocorrer o evento E tendo ocorrido o evento A; ou a probabilidade de E condicionada a A. Lê-se p(E) dado A.

$$p(E|A) = p(E \cap A) / p(A) \quad ; \quad p(A) > 0 .$$

Analogamente

$$p(A|E) = p(A \cap E) / p(E) \quad ; \quad p(E) > 0 .$$

$$p(E \cap A) = p(A \cap E) = p(E|A).p(A) = p(A|E).p(E) \quad (3.1)$$

expressão conhecida como a Regra do Produto.

Da expressão acima, obtém-se:

$$p(E|A) = [p(A|E).p(E)] / p(A) .$$

Para EME e exaustivos:

$$p(E_i | A) = [p(A|E_i).p(E_i)] / p(A) .$$

$$\text{Mas } p(A) = \sum_i p(E_i \cap A) = \sum_i p(A|E_i) \cdot p(E_i) \quad (3.2)$$

expressão do Teorema ou Fórmula de Bayes (cf. (1.2)) .

Adaptando a notação:

$$p(x|l) = [p(l|x) \cdot p(x)] / \sum_i p(l|x_i) \cdot p(x_i) .$$

Generalizando o Teorema de Bayes:

$$f(x|l) = [f(l|x) \cdot f(x)] / \sum_i f(l|x_i) \cdot f(x_i) \cdot dx \quad (3.3)$$

formalmente análoga ao Teorema de Bayes, porém de significado mais abrangente:

$f(x|l)$ -- Função densidade de probabilidade dos parâmetros posterior à realização do experimento.

$f(x)$ -- Função densidade de probabilidade prévia dos parâmetros.

$f(l|x)$ -- Função de verossimilhança do resultado experimental l .

Sendo o denominador um fator de normalização, a (3.3) pode ser reescrita simplificadaamente:

$$f(x|l) \propto f(l|x) \cdot f(x) \quad (3.4)$$

onde \propto significa "proporcional a".

O processo da inferência estatística visa estimar parâmetros (particularmente médias e variâncias), a partir de dados experimentais. No caso da inferência bayesiana ocorre a estimativa do novo estado dos parâmetros, em função do conhecimento adquirido (realização do experimento) e a partir do conhecimento do estado inicial dos parâmetros. Trata-se, portanto, de uma revisão de estimativas decorrente de um novo estado da informação.

Na fig. 3.1, $[X_0, C_0]$ e $[X_1, C_1]$ representam o mesmo vetor de parâmetros e respectivas matrizes de covariâncias, apenas em estados distintos, isto é, com estimativas anteriores e posteriores, respectivamente, à realização do experimento (1).

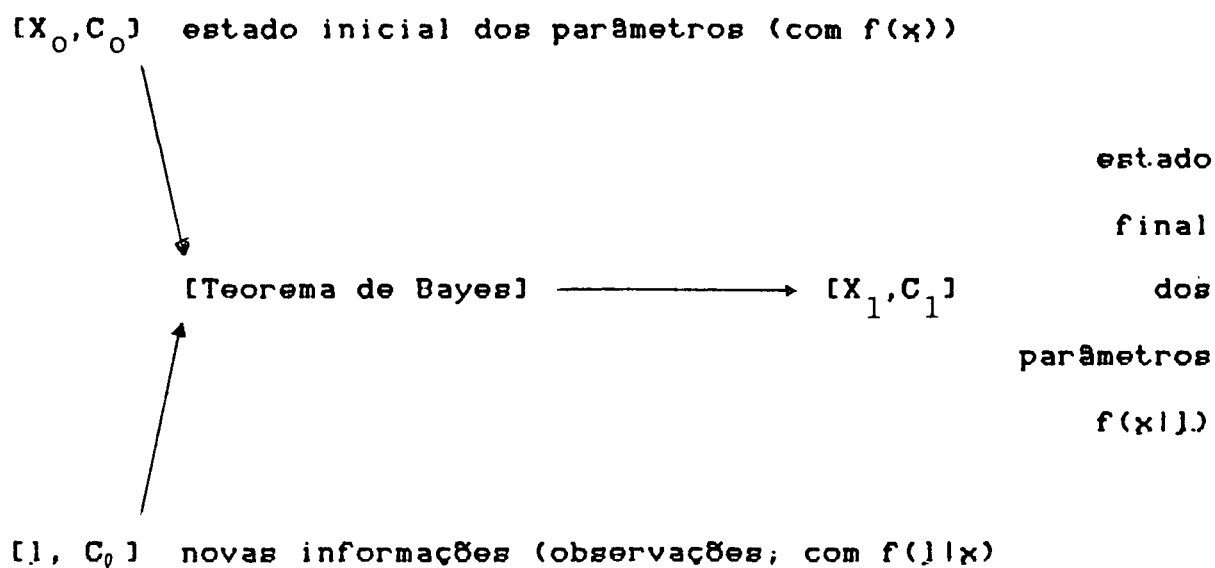


Figura 3.1: Ilustração do conceito de inferência bayesiana.

A estimativa dos parâmetros na inferência bayesiana requer uma função de perda associada ao problema, a qual deve ser minimizada.

Seja $q(x,u)$ uma função de perda quadrática:

$$q(x,u) = (x - u)'(x - u) \quad (3.5)$$

$$= x'x - 2x'u + u'u = \text{mínimo}$$

$$d[q(x,u)]/dx = 2x - 2u = 0$$

$$x = u$$

$$F(x) = E(u) = u$$

$$E(x) = u \quad (3.6)$$

Usando a (3.6), a definição da matriz variância covariância do vetor x é:

$$C_x = E((x - F(x)) \cdot (x - F(x))')$$

$$C_x = E(xx') - 2 \cdot x \cdot E(x') + E(x) \cdot E(x')$$

$$C_x = E(xx') - 2 \cdot E(x) \cdot E(x') + E(x) \cdot E(x')$$

$$C_x = E(xx') - E(x) \cdot E(x') \quad (3.7)$$

A expressão (3.6) mostra que a média da distribuição de probabilidade é a estimativa que minimiza a função de perda quadrática. A igualdade lá afirmada prova que a média $E(x)$ é um estimador imparcial da média populacional μ . A matriz variância-covariância C_X , da expressão (3.7), tem a propriedade do traço mínimo (GEMAEL 1211), o que representa uma perda esperada mínima. Então, através da função de perda quadrática, a inferência bayesiana também proporciona estimadores imparciais e de variância mínima.

Tomando-se como exemplo a função densidade de probabilidade normal posterior, as suas estimativas bayesianas seguem três situações distintas:

- (a) média desconhecida e variância conhecida
- (b) média conhecida e variância desconhecida
- (c) média desconhecida e variância desconhecida

No primeiro caso, as expressões dos estimadores são apresentadas em abundância na literatura especializada. Citam-se, por exemplo, as referências 1051, 1071, 1261, 1561. DEKMAN & COSTA NETO 1051 apresentam a solução para a situação (b). E para o último caso, aquele que mais se aproxima da realidade dos dados fotogramétricos, citam-se as referências 1051 e 1071.

ROSSLER 1071 deduziu as expressões das estimativas bayesianas para o modelo linear(izado) clássico e também para o caso em que há informação prévia relevante, baseado em distribuições normais multivariadas, as quais seguem abaixo.

Para o modelo linear(izado) clássico:

$$\mathbf{x} = (A'PA)^{-1} A'Pl$$

$$C_X = \sigma_0^2 (A'PA)^{-1} \quad (3.8)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = y'Py / (n-u-2)$$

Para o modelo linear(izado) com informação prévia relevante:

$$\mathbf{x} = (A'PA + P_X)^{-1} (A'Pl + P_X l_X)$$

$$C = \sigma_0^2 (A'PA + P_X)^{-1} \quad (3.9)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = (y'Py + l_X'P_X l_X) / (n-2)$$

σ_0^2 comum a ambos os conjuntos de dados.

A perda de dois graus de liberdade, na estimativa da VUP posterior, justifica-se por causa dos dois parâmetros incógnitos da função densidade de probabilidade normal multivariada postulada previamente, a saber, o vetor de médias e a matriz variância-covariância. Observe-se que na estimativa clássica, adotando-se o critério de mínimos quadrados, não há necessidade de postular-se ou adotar-se uma função densidade de probabilidade, razão porque os graus de liberdade expressam

apenas a diferença entre a quantidade de equações e incógnitas. Obviamente, para um número elevado de graus de liberdade, a diferença não é significativa.

Ainda para o modelo linear(izado) com informação prévia relevante, mas com VUP's distintas e incógnitas para cada conjunto de dados:

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}/\sigma_0^2 + \mathbf{P}_X/\sigma_X^2)^{-1} \cdot (\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{l}/\sigma_0^2 + \mathbf{P}_X\mathbf{l}_X/\sigma_X^2)$$

$$\mathbf{C}_X = (\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}/\sigma_0^2 + \mathbf{P}_X/\sigma_X^2)^{-1} \quad (3.10)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \mathbf{y}'\mathbf{P}\mathbf{y}/(n-u) \quad ; \quad \hat{\sigma}_X^2 = \mathbf{y}_X'\mathbf{P}_X\mathbf{y}_X/(n-u)$$

As expressões de \mathbf{C}_X , $\hat{\sigma}_0^2$ e $\hat{\sigma}_X^2$ são apenas aproximadas. A solução rigorosamente exata não é possível (VANICEK & KRAKIWSKY 1931), porque obtém-se um sistema de equações compatível, mas indeterminado (uma equação a duas incógnitas) para as estimativas das VUP's.

3.2 Fundamentos do ajustamento generalizado

Usualmente, as variáveis submetidas a um modelo matemático de ajustamento são separadas em observações e parâmetros incógnitos. No caso específico de fototriangulação por feixes de raios, por exemplo, as fotocoordenadas e pontos de

controle são observações e a orientação exterior das fotos e as coordenadas-objeto dos pontos de passagem são incógnitas (parâmetros) independentes entre si e relacionadas às observações através do modelo matemático funcional (equações de colinearidade). O ajustamento das observações, geralmente, é realizado pelo método paramétrico com injunções de peso (informação de referencial) aos pontos de controle.

O estágio tecnológico atual proporciona métodos e equipamentos especialmente desenvolvidos para determinar a posição e orientação do sensor no espaço. Estes métodos e equipamentos reunidos constituem os sistemas de posicionamento do sensor. Geralmente, a posição e a orientação de um sensor (aéreo ou espaço-transportado) são incógnitas, na concepção clássica das fototriangulações, conforme mencionado no parágrafo anterior. O emprego de sistemas de posicionamento do sensor em projetos fotogramétricos visa essencialmente a substituição do controle convencional (pontos de controle). Embora esta meta ainda não esteja atingida em níveis satisfatórios de acurácia, muito se tem feito nesta direção, permitindo antever, em um futuro próximo, a realização de fototriangulações sem controle convencional. Assim, os pontos de controle (atualmente, necessários e indispensáveis) poderão continuar sendo informações relevantes, ainda que facultativas.

Simbolicamente, as expressões matemáticas utilizadas em fototriangulações por feixes de raios, podem ser escritas da forma geral seguinte:

$$x = Fx (f, \omega, \phi, \kappa, X_c, Y_c, Z_c, X, Y, Z)$$

(3.11)

$$y = Fy (f, \omega, \phi, \kappa, X_c, Y_c, Z_c, X, Y, Z)$$

onde

f : distância focal calibrada da câmara

x, y : coordenadas fotogramétricas de pontos-imagem (observações)

X, Y, Z : coordenadas de pontos-objeto (incógnitas)

e os demais elementos foram definidos no parágrafo anterior.

Considerando a possibilidade de medir e registrar os parâmetros, ou um grupo deles, mediante o uso de sistemas de posicionamento da câmara ($\omega, \phi, \kappa, X_c, Y_c, Z_c$) e considerando, também, que a realização da filtragem progressiva proporciona boas aproximações (quase observações) para as coordenadas-objeto (X, Y, Z) dos pontos a serem triangulados, as variáveis mencionadas podem ser admitidas como "observações" nas expressões (3.11).

A observação de parâmetros por meio de equipamentos especiais nem sempre propicia redundância de observações para a mesma variável (parâmetro). Na falta de redundância, isto é, única observação, a variância da observação do parâmetro pode ser assumida proporcional à precisão nominal do instrumento. Esta é uma das maneiras pelas quais é possível a atribuição de pesos aos parâmetros. Então, a capacidade resolutiva do equi-

pamento propicia um grau de conhecimento prévio, o qual é assimilado como variância, a menos de um fator, e esta é transformada em peso do parâmetro. Por outro lado, a dispersão das coordenadas-objeto dos pontos de passagem pode ser obtida da filtragem progressiva e a correspondente matriz dos pesos obtida da MVC inversa, multiplicada por um escalar.

Lançando mão de um conhecimento prévio a respeito dos parâmetros, torna-se cômodo tratar todas as variáveis do modelo matemático como observações, embora de origens distintas, porque é possível associar a elas uma matriz de dispersão (matriz variância-covariância). Esta consideração conduz a um ajustamento pelo método das equações de condição (correlatos), uma vez que apenas "observações" participam do modelo (SCHMID & SCHMID 1471). Sob este aspecto o vetor de "resíduos" \underline{v} é a incógnita do problema e a solução é (cf. APÊNDICE B):

$$\underline{v} = - P^{-1} \cdot B' (B P^{-1} B')^{-1} \underline{w}$$

sendo \underline{w} o vetor erro de fechamento (discrepância do modelo matemático funcional). A matriz $(B P^{-1} B')$ tem dimensões $(2m, 2m)$, sendo "m" a quantidade de pontos imagem observados. No caso, "2m" coincide com o total de fotocoordenadas observadas.

Por outro lado, a incorporação do conhecimento prévio dos parâmetros na forma de injunções relativas (ou de peso) conduz a um ajustamento com todos os parâmetros ponderados (ponderação generalizada). Neste caso, a expressão da solução do ajustamento é:

$$\hat{x} = (A'PA + P_X)^{-1} (A'Pl + P_X l_X)$$

onde

$$P = \sigma_0^2 \cdot C_\ell^{-1} \quad ; \quad P_X = \sigma_0^2 C_X^{-1}$$

Tal procedimento é mais conveniente do ponto de vista computacional, uma vez que a ordem da matriz de coeficientes das equações normais é (u,u), consideravelmente menor do que a anterior (2m,2m), sendo "u" a quantidade de parâmetros do problema. A matriz P_X (peso dos parâmetros) adiciona informações a respeito da qualidade dos parâmetros medidos diretamente com emprego de equipamentos apropriados, no caso da posição e orientação do sensor, ou das coordenadas-objeto dos pontos de terreno submetidos à filtragem progressiva.

Se $P_X \rightarrow 0 \Rightarrow$ variável livre

Se $P_X \rightarrow \infty \Rightarrow$ constante

A estimativa da VUP "a posteriori", quando incógnita e comum a ambos os conjuntos de variáveis, é dada pela expressão

$$\hat{\sigma}_0^2 = (v'Pv + v_X'P_X v_X) / (n+i-u)$$

onde "i" é a quantidade de parâmetros observados introduzidos na forma de injunções de peso.

Em suma, o conjunto das expressões abaixo representa a solução do ajustamento generalizado.

$$\mathbf{x} = - (\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{P}_x)^{-1} (\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{l} + \mathbf{P}_x\mathbf{l}_x)$$

$$\mathbf{C}_x = \sigma_0^2 (\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{P}_x)^{-1}$$

(3.12)

$$\hat{\sigma}_0^2 = (\mathbf{y}'\mathbf{P}\mathbf{y} + \mathbf{y}_x'\mathbf{P}_x\mathbf{y}_x) / (n+i-u)$$

onde

$$\mathbf{P} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{C}_l^{-1} \quad ; \quad \mathbf{P}_x = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{C}_{xb}^{-1}$$

No caso em que há duas VUP's distintas, a solução através do ajustamento generalizado coincide com aquela dada pela inferência bayesiana (3.10), lembrando seu caráter aproximado.

3.3 O problema do controle: inferência bayesiana e ajustamento generalizado

Na fototriangulação clássica, a determinação de coordenadas de pontos no espaço-objeto depende das observações de fotocoordenadas e dos pontos de controle. Destes, é importante destacar o seu papel, qual seja, o de realizar o referencial para a triangulação. Erros grosseiros podem ocorrer nos dois tipos de dados (fotocoordenadas e pontos de controle). Considerando ausência de eg nos dados de pontos imagem, se as informações referentes aos pontos de controle estiverem corretas, a rede de pontos de referência estará bem determinada e a triangulação seguirá sem problemas. Entretanto, informações de controle erradas implicarão em má realização do referencial,

tendo como consequência prática fotocoordenadas "aparentemente" erradas (ou suspeitas) e baixa precisão externa das coordenadas estimadas para os pontos-objeto. Este interessante assunto está sendo pesquisado por Henrique Firkowski, para a sua dissertação de mestrado (Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná), cujo objetivo é estudar as consequências da introdução de ϵ_g nos pontos de controle, tomando por base o programa BLUH. LUGNANI & MITISHITA (1371, 1381) recentemente estudaram a detecção de ϵ_g em pontos de controle, tendo por base a filtragem progressiva (cf. também 1421).

Uma outra maneira de abordar o problema do controle é efetuar a fototriangulação sem pontos de controle. Neste caso, a realização do referencial deve ser feita de outro modo; por exemplo, lançando mão de um conhecimento prévio dos parâmetros. Este conhecimento pode ser subjetivo ou objetivo. Se subjetivo, baseado na experiência do investigador, os fundamentos pertencem ao campo da inferência bayesiana. Se objetivo, baseado na evidência de um experimento, os fundamentos pertencem à estatística clássica.

Recorrendo às expressões (3.10) e lembrando que representam as soluções coincidentes do ponto de vista bayesiano e do ajustamento generalizado, para estimativa do vetor \underline{x} , verifica-se que a informação prévia a respeito dos parâmetros é introduzida pela matriz P_x , a qual pode até mesmo ser numericamente igual nos dois casos. A diferença é, portanto, absolutamente conceitual, dependendo se P_x expressa conhecimento prévio subjetivo ou objetivo.

A adição da informação prévia relevante a respeito dos parâmetros elimina a singularidade da matriz das equações normais, possibilitando solucionar o vetor x sem o cálculo da pseudo-inversa. A origem, orientação e escala do referencial são estabelecidas implicitamente pelas coordenadas ponderadas dos pontos envolvidos (centros perspectivos e pontos-objeto).

É interessante analisar as consequências da atribuição de pesos aos parâmetros ("quase-observações"). Veja-se a tabela 3.1: as situações A e D são corretas e desejáveis. A situação B é apenas indesejável, uma vez que pode ser interpretada como a omissão de uma observação em um conjunto superabundante. Por outro lado, a situação C é indesejável e intolerável, porque aparenta a inclusão de um eg em uma "quase-observação".

		"quase-observação"		igualdade	
		boa		má	
		grande		A	C
peso					
		pequeno		B	D

Tabela 3.1: "Quase-observação" - peso versus qualidade.

Esta análise desperta para o cuidado que se deve ter na ponderação generalizada dos parâmetros. Bem por isto, parece adequado aplicá-la após a filtragem progressiva, quando o grau de conhecimento a respeito dos parâmetros é suficiente para uma ponderação coerente.

4 METODOLOGIA EXPERIMENTAL

A fototriangulação é uma tarefa assentada em uma teoria que possibilita trabalhar com um modelo funcional relativamente simples. Entretanto, o modelo estocástico associado às variáveis aleatórias do modelo funcional não é desenvolvido para operar com observações afetadas por eg. A prática das fototriangulações ensina que informações indesejáveis (erros grosseiros) não raro estão presentes nos dados. Por isto, geralmente, a fototriangulação é uma tarefa complexa. É possível solucionar o vetor de incógnitas de um bloco de feixes de raios, sob o princípio da máxima verossimilhança, sem a presença de pontos de controle, baseado no conceito da inferência bayesiana. A subsequente análise dos resíduos é realizada pelo método de Pope. Para verificação desta tese, a parte experimental do trabalho requereu a elaboração de um programa de cálculo computacional de ajustamento de observações, baseado no método de fototriangulação por feixes de raios. A solução bayesiana, coincidente com a do ajustamento generalizado, foi adotada. O teste estatístico aplicado aos resíduos é baseado no método de Pope.

4.1 Elaboração e teste do programa computacional

O programa computacional contém três rotinas principais, a saber: entrada, processamento e saída. Programado em linguagem FORTRAN, está instalado no sistema DEC-10 do Centro de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Paraná.

A rotina de entrada acessa cinco arquivos em disco, contendo os dados a serem processados. O primeiro arquivo contém os nomes dos demais arquivos de dados e os números de controle, tais como, quantidade de pontos e fotos, critério de convergência, etc. Os outros quatro arquivos são de fotocoordenadas, de orientação exterior das fotos, de coordenadas aproximadas dos pontos-objeto e de coordenadas corretas dos pontos-objeto.

O processamento dos dados flui através de um algoritmo iterativo, uma vez que o modelo matemático funcional (equações de colinearidade) é linearizado adotando-se os dois primeiros termos da série de Taylor. As equações de colinearidade são consideradas sem parâmetros adicionais, porque as fotocoordenadas foram geradas sem erros sistemáticos (cf. 4.2). O programa aceita ponderação dos elementos de orientação exterior das fotos e de coordenadas de pontos-objeto.

Através da rotina de saída, o resultado pode ser listado em impressoras ou armazenado em disco.

4.2 Simulação de um bloco de feixes

Inicialmente, foi definida uma malha de 25 pontos-objeto idealizados sobre um terreno pouco movimentado e obedecendo a uma distribuição aproximadamente regular (fig. 4.1). Dez fotografias aéreas foram idealizadas na escala aproximada 1:10000, de modo a garantir superposição longitudinal e transversal de cerca de 60% x 30%, respectivamente. Em algumas fo-

tos foram admitidos movimentos angulares inferiores a 2 sexagesimais. Há 4 fotos com 6 pontos-imagem e 6 fotos com 9 pontos-imagem.

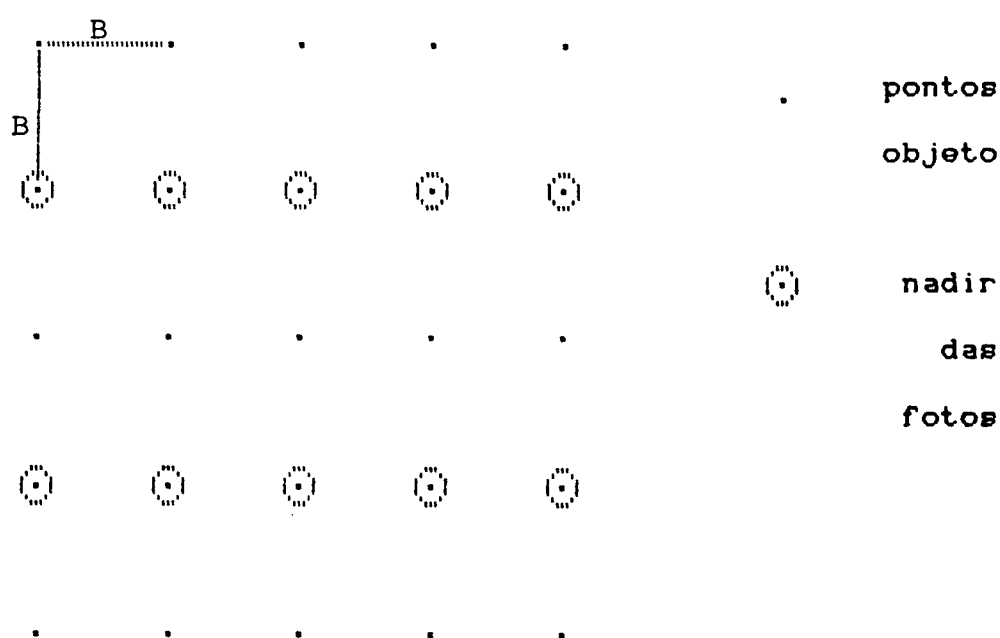


Figura 4.1: Esquema dos pontos-objeto e do nadir das fotos.

Há, portanto, $2 \cdot (6 \cdot 4 + 9 \cdot 6) = 156$ equações de observação e $6 \cdot 10 + 3 \cdot 25 = 135$ parâmetros a determinar, perfazendo um sistema de 21 equações superabundantes. Se todos os parâmetros forem ponderados, justificados por um conhecimento prévio, chega-se a um sistema com 156 graus de liberdade, exatamente a quantidade de equações de observação.

As fotocoordenadas calculadas sob a suposição de colinearidade rigorosa, isto é, ausência de erros sistemáticos, representam valores ideais. A esses foram adicionados erros randômicos não superiores a três desvios-padrões. Um desvio-padrão (σ) foi feito igual a 5 μm .

Os pontos-imagem assinalados na figura 4.2 representam os locais e componentes x,y de ocorrência de eg, cujas quantidades foram: 2 eg (ponto nº 3), 6 eg (nºs 1, 3 e 5) e 10 eg (1 a 5). Em termos percentuais, 2 eg equivalem a cerca de 1,3%, 6 eg a cerca de 3,8% e 10 eg a aproximadamente 6,4% do total de observações. Admite-se que o percentual de 1,3% represente uma pequena quantidade de eg, os 3,8% representem um número médio de eg e 6,4% uma grande quantidade.

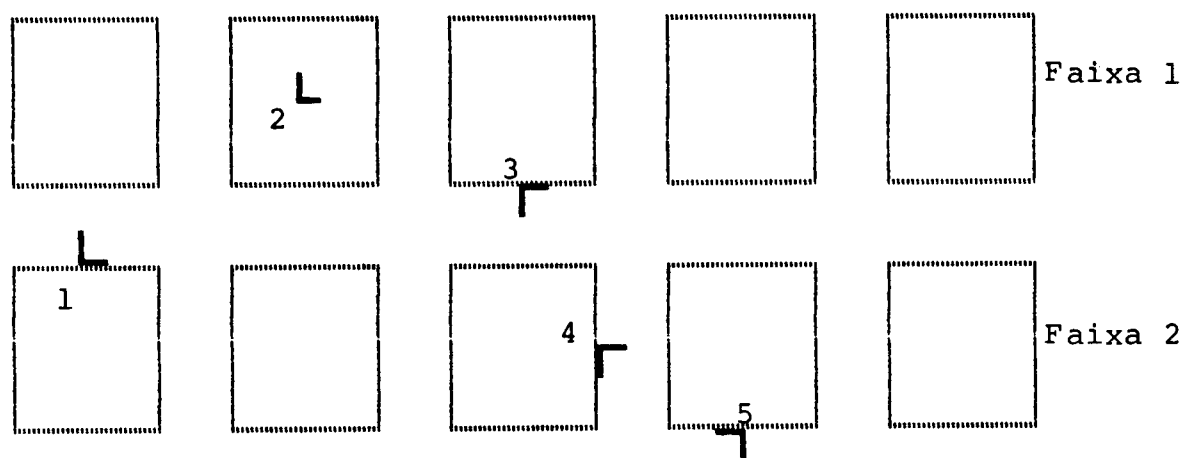


Figura 4.2: Ocorrência de eg nas componentes das fotocoords.

4.3 Solução bayesiana

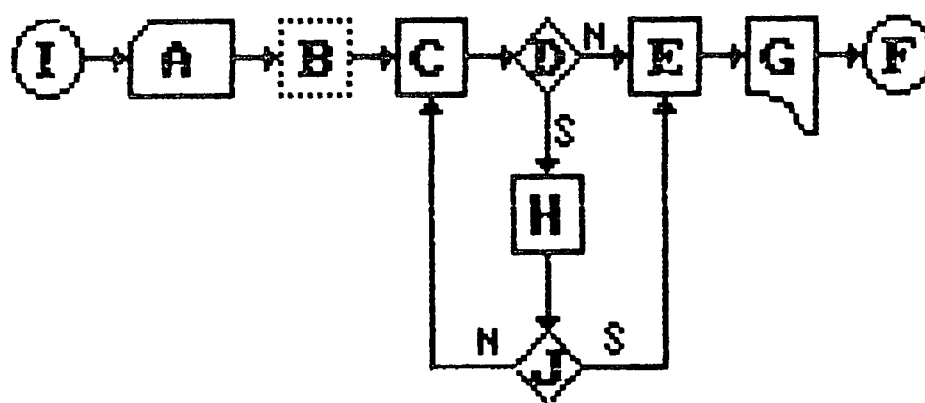
Foi apresentada no capítulo anterior a coincidência das soluções bayesiana e do ajustamento generalizado, quando se admitiu que havia duas VUP distintas; uma (σ_0^2) para o grupo das observações (fotocoordenadas) e outra (σ_X^2) para o grupo de "quase-observações" (parâmetros ponderados). A solução implementada no programa computacional é o conjunto das equações (3.10). O critério de convergência adotado foi baseado nas coordenadas-objeto, cuja diferença entre duas iterações consecutivas deveria ser inferior a 0,1 m. A variância prévia dos parâmetros foi de 10 m² e 100 m². Quando de 10 m², os valores aproximados dos parâmetros estavam fora da verdadeira posição em até, no máximo, 5 m. Quando de 100 m², em até, no máximo, 15 m. Variâncias menores conferem à geometria do bloco maior rigidez e vice-versa.

4.4 Teste estatístico para erros grosseiros

O teste estatístico para a DLAEG implementado no programa computacional é baseado no método de Pope (cf. 2.4.2). O teste é realizado da seguinte maneira:

i) Após a convergência (pressuposta por causa da prévia e hipotética realização da filtragem progressiva) da solução bayesiana, geralmente em três iterações, todos os resíduos padronizados, referentes às fotocoordenadas, são testados ao nível de significância de 1%, contra o critério de rejeição (c),

sendo rejeitadas as observações (fotocoordenadas) correspondentes aos resíduos que suplantarem este valor. A "rejeição" é feita atribuindo às observações um peso muito pequeno (10^{-10}). Evidentemente, se nenhuma observação for considerada suspeita de conter eg, passa-se a iii.



I: Início

A: Entrada dos dados

B: Filtragem progressiva hipoteticamente realizada

C: Solução bayesiana até convergência numérica dos parâmetros

D: Teste estatístico para a DLAEG (método de Pope)

E: Adição dos pontos de controle e solução bayesiana final até convergência numérica dos parâmetros

G: Saída dos resultados

H: Atualização dos parâmetros

J: Teste para saber se eg são os mesmos da fase anterior;
válido para fase ≥ 2

F: Fim.

Fig. 4.3: Fluxograma abreviado dos principais passos

ii) Nova solução é calculada e após a convergência (agora, geralmente, em 2 iterações) novamente é aplicado o teste sobre os resíduos... Este procedimento é repetido até que nenhuma das observações remanescentes seja rejeitada.

iii) É calculada a solução definitiva com a inclusão dos pontos de controle, sem a presença das observações consideradas suspeitas de conter eg.

4.5 Erro médio quadrático e desvio-padrão estimado

O erro médio quadrático (EMQ) expressa claramente a precisão externa da solução, enquanto que o desvio-padrão estimado (DPE) exprime a precisão interna. Os EMQ são os valores médios dados pela expressão

$$EMQ = (\sum_1 D_i^2 / (n-1))^{1/2}$$

onde " D_i " é a diferença entre o valor estimado e o valor verdadeiro das coordenadas e " n " é a quantidade de coordenadas (tamanho da amostra), no caso, 21. Os DPE são valores médios obtidos pela expressão

$$DPE = (\sum_1 S_i^2 / (n-1))^{1/2}$$

onde S_i é a variância estimada para a i -ésima coordenada contida na diagonal principal da matriz variância covariância dos parâmetros ajustados, $C_X = (A'PA + P_X)^{-1}$, com a ressalva que as

VUP's "a posteriori" são feitas iguais a 1. A justificativa para esta igualdade seria tranquila, se a realização do teste de χ^2 , para as VUP's (σ_0^2 e σ_X^2) fornecesse evidência para não rejeitar a hipótese básica da igualdade entre as VUP's "a priori" e "a posteriori", sendo que as VUP's "a priori" foram arbitrariamente escolhidas iguais a 1. Entretanto, dado o caráter aproximado das expressões C_X, σ_0^2 e σ_X^2 , em (3.10), o rigor do teste estatístico é incompatível com a solução aproximada, porque aumentam-se os riscos de ocorrência dos erros tipos I e II, referentes à hipótese básica. Em outras palavras, os limites para o intervalo de existência do parâmetro estatístico variância são desconhecidos e, por extensão, os riscos mencionados também são incógnitos. Desta maneira, é feita a imposição de que ambas as VUP's "a posteriori" sejam iguais a 1.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Esta seção apresenta e discute os experimentos e os resultados obtidos na parte experimental do trabalho. São mostrados apenas os experimentos considerados finais, para efeito de análise, em função dos objetivos propostos. Entretanto, uma palavra deve ser dita a respeito dos experimentos preliminares.

Os experimentos realizados, considerados significativos para a presente discussão, são mostrados na fig. 5.1, onde VEG é "valor do eg" introduzido nas fotocoordenadas, VPP é a "variância prévia dos parâmetros" atribuída aos elementos de posicionamento da câmara e aos pontos-objeto e QEG é a "quantidade de eg" nas fotocoordenadas.

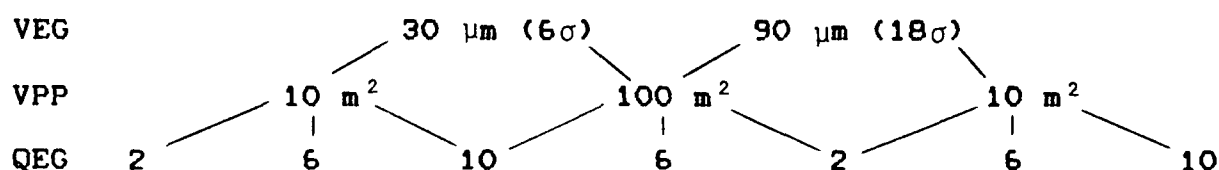


Figura 5.1: Esquema das características dos experimentos realizados

Da figura acima, vê-se que foram realizados doze experimentos, variando-se as características VEG, VPP e QEG. Além destes, dois outros foram realizados, sem a ocorrência de eg, alterando-se apenas as variâncias dos parâmetros.

Evidentemente, apresentar e discutir cada um deles pareceria monótono e poderia prejudicar a análise do desempenho do método proposto para a DLAEG. Por esta razão, optou-se pela apresentação das características e dos resultados de todos os experimentos em conjunto.

5.1 Experimentos preliminares

Os experimentos iniciais basearam-se na hipótese de que os ângulos de rotação (orientação) da câmara (ω, ϕ, κ) deveriam ser de no máximo 13° em módulo, de acordo com as especificações para aerolevantamentos fotogramétricos, geralmente recomendadas. Assim, para um bloco de fotos aéreas verticais, média de 0° e desvio-padrão de 2° , para os ângulos, pareciam ser uma distribuição adequada para estas variáveis aleatórias. A idéia de incorporar estas informações ao ajustamento das observações do bloco, na forma de "um conhecimento prévio a respeito dos parâmetros" era atrativa, no sentido de aumentar a rigidez geométrica do bloco e melhorar a DLAEG, isto é, a confiabilidade da solução. A idéia sugeria que a influência dos possíveis eg deveria restringir-se às imediações do local de ocorrência. Em outras palavras, os eg ou não deveriam propagar-se para outros parâmetros e observações que não se vinculassem diretamente com a observação errada, ou a propagação seria atenuada. Os experimentos, então, foram realizados, com eg presentes nas fotocoordenadas e sob suave ponderação das coordenadas dos centros perspectivos (posição) da câmara. Os re-

sultados, quanto à DLAEG, foram insatisfatórios e decepcionantes.

Novos experimentos foram esboçados, com a ponderação das coordenadas dos centros perspectivos aumentada em relação à ponderação dos ângulos de rotação. Os resultados mostraram alguma melhoria, quanto à restrição da propagação dos eg, o que permitiu concluir que o conhecimento prévio dos parâmetros de posição da câmara estava beneficiando de algum modo. Contudo, os resultados não possibilitaram a localização dos eg, uma vez que as suas influências foram apenas levemente atenuadas.

Baseado nestes resultados, pode-se dizer que os parâmetros de translação da câmara são dominantes em relação aos de rotação. Assim, surge uma primeira discussão sobre a especialização dos sistemas de posicionamento de câmaras aéreas: parece mais indicado o sentido de translação em vez de orientação da câmara.

Outras tentativas foram feitas, como, por exemplo, a manipulação de pesos de fotocoordenadas e de parâmetros, separada ou conjuntamente. Os resultados foram desanimadores, isto é, os eg intencionalmente introduzidos raramente foram localizados.

A manipulação dos pesos é vista como um método robusto para a DLAEG. Por método robusto entende-se aquele que fornece estimativas de parâmetros que pouco ou nenhuma influência recebem de observações inconsistentes. Este método tem sido utilizado com relativo sucesso em alguns programas de fototriangulação. Basicamente, estabelece-se uma função analítica de peso para as observações, $p = f(v)$, tal que $f(v)$ calcula

pesos (p) menores para módulos de resíduos ($|v|$) maiores e vice-versa. Após a convergência da solução, novos pesos são calculados; grandes resíduos correspondem a pesos pequenos e isto praticamente exclui a contribuição da observação na reavaliação da próxima estimativa. O procedimento é repetido até nova convergência e novos pesos são calculados e, assim, sucessivamente. Novamente deve-se notar que a convergência da solução é requerida e isto, efetivamente, em fototriangulação, tem sido possível após a filtragem progressiva. O baixo custo computacional e a facilidade de programação e de implementação são os fatores mais favoráveis à adoção deste método. Entretanto, por razões já comentadas (cf. 2.4.1), a redundância geométrica do ponto não é considerada, sendo este o fator mais desfavorável. São possíveis, sob um alto risco, a exclusão (rejeição) de um grande número de observações corretas e a não-rejeição de observações erradas. Além disto, o método é muito dependente da estabilidade geométrica da rede, isto é, requer boa distribuição e densificação dos pontos de controle (JUHL 1291).

Contrariamente a esta exigência (cf. 2.6 e 3), a presente tese visa substituir ou complementar o controle convencional, lançando mão de um conhecimento (subjetivo ou objetivo) prévio dos parâmetros. Talvez por isto, as tentativas realizadas no sentido de manipular os pesos das fotocoordenadas, inicialmente, não satisfizeram à expectativa, quanto à DLAEG. Em seguida, foi tentada a manipulação conjunta dos pesos das observações e dos parâmetros e, por último, a manipulação dos pesos dos parâmetros isoladamente, com o algoritmo de Pope para as fotocoordenadas. Todas estas tentativas proporcionaram

resultados desanimadores e, às vezes, até incompreensíveis. As prováveis causas do insucesso, em termos de resultados, podem ser a reduzida quantidade (intencional) de pontos de controle e/ou inadequada ponderação relativa entre as variáveis. Daí, a necessidade de melhorar o modelo estocástico, obtendo soluções de melhor aproximação.

5.2 Da DLAEQ em fotocoordenadas

A tabela 5.1 sintetiza os resultados referentes aos quatorze experimentos realizados, os quais foram separados em cinco grupos, conforme mostrado na coluna 1. As colunas encaixadas por DLAEQ representam C detecções corretas, E detecções erradas e F falhas ou omissões, isto é, nem detecção correta, nem detecção errada. A ocorrência de E pode ser comparada ao "erro tipo I" da teoria dos testes de hipóteses estatísticas e F ao "erro tipo II". As colunas 8 e 9 representam, respectivamente, o número de graus de liberdade e a VUP (variância da unidade de peso) "a posteriori" referente às fotocoordenadas (cf. (3.10)). A décima coluna mostra o valor absoluto do maior resíduo entre os remanescentes, isto é, todos os resíduos menores do que este valor referem-se às observações não rejeitadas pelo teste estatístico, o que efetivamente é um indicador de confiabilidade. A última coluna mostra o número de iterações (NI) até o final da detecção dos eg mais (+) o número de iterações após a introdução dos pontos de controle.

CARACTERÍSTICAS				RESULTADOS						
Grupo	VEG	VPP	QEG	C	E	F	GL	VUP	máx V	NI
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
GOA	0	10 m ²	0	-	-	-	21	1,89	9,4	3+2
GOB	0	100 m ²	0	-	-	-	21	3,68	9,8	3+2
A			2	2	0	0	19	2,51	7,4	5+2
G1 B	6σ	10 m ²	6	3	1	3	17	3,31	7,3	11+2
C			10	1	0	9	20	11,22	16,8	5+2
A			2	2	0	0	19	1,27	7,3	7+2
G2 B	6σ	100 m ²	6	3	0	3	18	4,20	9,0	9+2
C			10	1	0	9	20	10,98	16,4	5+2
A			2	2	0	0	19	1,32	7,4	5+2
G3 B	18σ	10 m ²	6	5	5	1	11	1,24	4,8	17+2
C			10	5	0	5	16	12,01	20,1	11+2
A			2	2	0	0	19	1,27	7,4	5+2
G4 B	18σ	100 m ²	6	4	3	2	14	2,11	7,5	13+2
C			10	5	0	5	16	11,87	20,1	11+3

μm

Tabela 5.1: Síntese dos resultados dos experimentos realizados

Os grupos de testes G1 e G2 apresentam a ocorrência de pequenos eg (6σ = 30 μm) e G3 e G4 eg considerados médios (18 σ = 90 μm). Esta magnitude para médios eg representa aproximadamente o limite inferior da capacidade de detecção da filtragem progressiva, hipoteticamente realizada. Os grupos G1 e G3 e o teste GOA representam a situação de maior rigidez geométrica do bloco, comparada à situação dos grupos G2 e G4 e o teste GOB, por conta da VPP. Em todos os grupos, de G1 a G4, os eg estão em pequena, média e grande quantidade.

5.2.1 Resultados sem erros grosseiros

As duas primeiras linhas da tabela apresentam as características e os resultados dos experimentos sem eg, em situações distintas de conhecimento prévio dos parâmetros. A diferença marcante é o resultado da VUP, a qual praticamente dobra quando a VPP aumenta de dez vezes. Em outras palavras, a VUP varia inversamente à rigidez geométrica do bloco.

5.2.2 Resultados com erros grosseiros

Os três experimentos realizados dentro de cada grupo com eg confirmam que a DLAEG piora com o aumento da QEG. Curioso é que para média QEG o número de iterações é superior àquele correspondente à grande QEG. Uma possível explicação para isto é que uma grande QEG, distribuída ao longo do bloco, acarreta um espalhamento mais regular de resíduos afetados por eg. Pelas expressões (2.11) e (2.12) observa-se que " $\tilde{\sigma}_v$ " é aumentado por causa de " σ_0^2 " e " \tilde{w}_i " pode ser diminuído, se $|v_i|$ não aumentar na proporção de " $\tilde{\sigma}_v$ ". A diminuição de " \tilde{w}_i " para níveis inferiores ao critério de rejeição " c " faz com que a observação não seja rejeitada. Estas não-rejeições em grande número permitem uma rápida convergência, ainda que sobre falsos valores. Deve ser lembrado que a convergência, neste caso, não é apenas referente ao aspecto numérico e sim em termos da necessidade de repetir o algoritmo de detecção (cf. fig. 4.3). Enquanto isto, diante de média QEG o teste estatístico permanece sensível, eliminando correta ou erroneamente (ou falhando), o que faz aumentar as iterações.

5.2.2.1 Com VEG pequeno (6σ) e aumento da VPP

A análise dos resultados do grupo G1 em relação ao grupo G2 mostra que, para pequena QEG, a VUP diminui, porque as fotocoordenadas passam a ser mais importantes na hierarquia dos pesos. Quando a QEG é média, o algoritmo fica um pouco prejudicado, detectando mais (certo ou errado). Neste caso, o

aumento da VPP torna a detecção menos confiável, embora a VUP seja maior. Quando há grande QEG, os resultados perdem a confiabilidade: as VUPs são grandes e praticamente iguais, independentes do rigor geométrico do bloco. No grupo G1 há melhor equilíbrio entre os pesos de fotocoordenadas e de parâmetros conhecidos "a priori". No grupo G2 há dominância dos pesos das fotocoordenadas em relação aos dos parâmetros, fato que explica NI maior, pois há uma tendência do sistema de "empurrar" os erros (correções) para as variáveis de menor peso.

5.2.2.2 Com VEG médio (18,0) e aumento da VPP

A análise dos grupos G3 e G4 revela que, para a QEG=6 (média quantidade), quando há maior equilíbrio (G3) entre os pesos de fotocoordenadas e de parâmetros, as detecções corretas (C) e erradas (E) são em maior número. Também prevalece a característica do maior NI. Há mais falhas (F) quando as fotocoordenadas têm maior peso relativo (G4). Nota-se que em G3B foram eliminadas dez observações (cinco indevidamente). Isto fez com que a VUP se tornasse menor, em comparação à do G4B, com sete eliminações (três indevidas). Deve-se notar que, embora haja falhas, isto é, observações com eg não rejeitadas, suas influências são atenuadas através da eliminação de observações corretas (erro tipo I). Estas eliminações e o maior NI fazem com que a forma quadrática dos resíduos seja diminuída e consequentemente a VUP também diminua. Claramente, os resultados da VUP de G3B e G4B são enganosos, porque induzem a não rejeitar uma hipótese falsa (erro tipo II). Quando a QEG é pe-

quena ou grande, os resultados se equivalem, quanto à DLAEG, sendo satisfatórios para QEG=2 e de baixa eficiência quando QEG=10.

5.2.2.3 Com VPP pequena e aumento do VEG

O grupo G3, quando comparado ao G1, indica melhor eficiência do método DLAEG, uma vez que aumenta o número de eliminações corretas (C) e diminui o número de falhas (F), para médias e grandes QEG. Quando a QEG=2, a VUP referente ao G3A é quase metade da VUP do G1A, sendo que o máximo resíduo absoluto, o número de iterações e as eliminações corretas (C) são iguais. (Talvez, a explicação para este fato seja que um eg pequeno (6σ), antes de ser localizado, distribua seus efeitos sobre outras observações, enquanto que um eg de tamanho médio (18σ), mais fácil de ser localizado, tenha seus efeitos bloqueados pela ação do teste estatístico para a DLAEG.) Quando os eg são de médio VEG, mesmo na presença de grande QEG, o algoritmo de detecção trabalha melhor; é o que mostra a comparação dos experimentos G1C e G3C. Em suma, mantendo-se a rigidez geométrica do bloco, a DLAEG funciona melhor se os eg forem de tamanho médio.

5.2.2.4 Com VPP grande e aumento do VEG

A comparação dos resultados do G4 em relação ao G2, no geral, indica melhor eficiência da DLAEG, semelhante à análise dos grupos 1 e 3. Confirma também, através do número de

iterrações, a dificuldade de se localizar pequenos eg (G2A e G2B) em comparação a médios eg (G4A e G4B). Quando há grande QEG, a convergência é rápida, porém, se dá sobre pontos falsos, conforme já comentado. Embora, no grupo 4, o valor do eg seja maior, a VUP é menor em G4B, em relação a G2B, porque houve um número maior de acertos (C) e menor número de falhas (F) na DLAEG. Além disto, três observações corretas foram eliminadas. Estas ocorrências conduzem a uma forma quadrática menor.

5.2.3 Resumo da discussão

O presente método de remoção de observações provavelmente inconsistentes (cf. fig. 4.3) pode ser interpretado como a automatização da idéia de rejeitar a observação associada ao maior resíduo em um processo repetitivo até que, a critério do investigador, a solução pareça satisfatória. Entretanto, quando da automatização, há possibilidade de que mais de uma observação suspeita seja eliminada simultaneamente. Mais importante ainda é o fato de o critério de rejeição substituir o investigador na decisão sobre os valores considerados satisfatórios, para terminar a busca de possíveis eg. Deve-se acrescentar que a sequência dos passos da aplicação do teste estatístico, conforme está, representa a melhor maneira que foi conseguida para a DLAEG (cf. 5.1).

Quando a QEG aumenta, piora a DLAEG. É possível concluir que o método de Pope, empregado após a solução bayesiana, funciona quando a QEG é pequena, funciona parcialmente quando a QEG é média e não funciona quando a QEG é grande.

Quando a VPP diminui, implica em aumentar o grau de conhecimento prévio dos parâmetros e melhorar a DLAEG. Contudo, é preciso estar atento para as situações B e/ou C da tabela 3.1, isto é, a situação B é indesejável porque representa a omissão de uma observação em um conjunto superabundante; a situação C é indesejável e intolerável porque representa a inclusão de um eg em uma "quase-observação".

O aumento do VEG no sentido de sair do limite de resolução dos sistemas de DLAEG para regiões de sensibilidade dos testes estatísticos é benéfico, pois melhora a detecção. Por outro lado, a ocorrência de eg com valor muito grande é prejudicial para os testes estatísticos. Daí, a necessidade da filtragem progressiva.

5.3 Da precisão externa das coordenadas de pontos-objeto

As tabelas seguintes apresentam os resultados dos experimentos referentes às coordenadas de pontos-objeto. A tabela 5.2 sintetiza os resultados, baseado no conceito de "erro médio quadrático" (EMQ) e de "desvio-padrão estimado" (DPE) (cf. 4.5).

A primeira coluna de ambas as tabelas 5.2 e 5.3 apenas identifica os experimentos, cujas características são as mesmas da tabela 5.1. As colunas 8, 9 e 10 da tabela 5.2 exprimem os valores da razão "EMQ/DPE", cujo significado é o fator de deterioração, ou conservação, da precisão externa em relação à precisão interna. Por conservação entende-

se o valor da razão menor do que 1. Isto talvez seja consequência do caráter aproximado da estimativa de C_x . Outra causa adicional pode ser devida ao fato de se negligenciar a correlação estatística dos parâmetros.

A tabela 5.3 apresenta os EMQ-X e Y em unidades de desvio-padrão (σ) das fotocoordenadas, lembrando que $\sigma = 5 \mu\text{m}$. O EMQ-Z, nesta tabela, é apresentado em unidades por mil metros (‰) da altura de voo (Hv).

5.3.1 Resultados sem erros grosseiros

Novamente, as duas primeiras linhas das tabelas apresentam os resultados dos experimentos sem eg, alterando-se o grau de conhecimento prévio dos parâmetros. Os valores de EMQ e DPE referentes às coordenadas "planimétricas" (cf. tab. 5.2) são praticamente equivalentes. Entretanto, em Z, os valores de EMQ e DPE, além de diferirem entre si, são significativamente maiores do que os "planimétricos", aliás como era de se esperar. A mencionada diferença é mais acentuada quando a comparação é feita entre os EMQ e os DPE dos experimentos. Neste caso, o fator de deterioração da precisão externa é 3,1 e da precisão interna é 2,9, aproximadamente, quando a VPP é aumentada em dez vezes. A tabela 5.3 confirma esta verificação.

G	EMQ (m)			DPE (m)			EMQ/DPE		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
GOA	0,11	0,10	0,70	0,10	0,11	0,55	1,1	0,9	1,3
GOB	0,10	0,10	2,16	0,10	0,11	1,56	1,1	0,9	1,4
G1A	0,11	0,12	0,60	0,10	0,11	0,55	1,1	1,1	1,1
C1B	0,07	0,11	0,60	0,10	0,12	0,55	0,7	0,9	1,1
G1C	0,14	0,10	0,82	0,10	0,11	0,55	1,4	0,9	1,5
G2A	0,11	0,12	1,38	0,10	0,11	1,59	1,1	1,0	0,9
G2B	0,10	0,12	1,39	0,10	0,12	1,59	1,0	1,1	0,9
G2C	0,14	0,11	2,88	0,10	0,11	1,56	1,4	1,0	1,9
G3A	0,11	0,12	0,60	0,10	0,11	0,55	1,1	1,1	1,1
C3B	0,21	0,69	0,51	0,24	0,72	0,60	0,9	1,0	0,9
G3C	0,16	0,21	0,68	0,10	0,11	0,55	1,6	1,9	1,2
G4A	0,11	0,12	1,38	0,10	0,11	1,59	1,1	1,0	0,9
C4B	0,14	2,26	1,32	0,11	2,24	1,60	1,2	1,0	0,8
G4C	0,16	0,23	1,41	0,10	0,12	1,59	1,6	2,0	0,9

Tab. 5.2: Síntese dos EMQ e DPE das coordenadas de pontos-objeto.

Grupo	EMQ em unidades de σ		EMQ em % Hv
	x	y	
(1)	(2)	(3)	(4)
GOA	2,3	1,9	0,7
GOB	2,2	1,9	2,2
G1A	2,1	2,5	0,6
G1B	1,5	2,1	0,6
G1C	2,8	1,9	0,8
G2A	2,1	2,4	1,4
G2B	2,0	2,4	1,4
G2C	2,7	2,2	2,9
G3A	2,1	2,5	0,6
G3B	4,3	13,8	0,5
G3C	3,2	4,2	0,7
G4A	2,1	2,4	1,4
G4B	2,8	45,3	1,3
G4C	3,2	4,5	1,4

Tab. 5.3: Síntese dos EMQ-X e Y em unidades de σ e EMQ-Z em % Hv.

	0,0	0,1	0,0	0,2	0,0 m
	0,6	0,5	0,5	0,7	0,6
a	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1
	0,7	0,6	0,6	0,5	0,5
	0,0	0,1	0,2	0,0	0,0
	0,0	0,1	0,1	0,2	0,0 m
	1,8	1,7	1,7	1,9	1,8
b	3,6	3,5	3,5	3,4	3,5
	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7
	0,0	0,1	0,2	0,0	0,0

Figura 5.2: Discrepâncias em Z nos 25 pontos-objeto

a: ... quando VPP = 10 m² .

b: ... quando VPP = 100 m² .

As figuras 5.2 mostram as discrepâncias em Z em cada ponto-objeto em função da alteração da VPP. Percebe-se que sob maior rigidez geométrica do bloco as discrepâncias são menores. Percebe-se também que a propagação dos erros (discrepâncias) é no sentido transversal às faixas de fotos, aliás como esperado. Isto se dá porque há somente quatro pontos de controle altimétricos. Entretanto, a rigidez geométrica estabelecida através da VPP pode controlar parcialmente a propagação.

5.3.2 Resultados com erros grosseiros

Em geral, quando a VPP é menor, a tendência de conservar as precisões externa e interna é percebida na tabela 5.2, considerando apenas as coordenadas "altimétricas". Quanto às "planimétricas", os resultados indicam que a alteração do estado de conhecimento prévio dos parâmetros é indiferente para a precisão externa ou interna. Evidentemente, há exceções (G3B, G3C, G4B e G4C) perceptíveis nas tabelas 5.2 e 5.3, que não por acaso ocorrem com VEG médio (18).

A razão EMQ/DPE é estudada sob as influências de VEG, VPP e QEG. As figuras 5.3, 5.4 e 5.5 apresentam gráficos, cujas ordenadas são a razão EMQ/DPE e abscissas referem-se às características que estão sendo estudadas. Cada eixo coordenado X,Y,Z é analisado separadamente.

5.3.2.1 A razão EMQ/DPE em função da QEG

A figura 5.3a representa a dependência da razão EMQ/DPE da QEG em X. Para pequena QEG, a razão é constante e próxima de 1. Para média QEG, a razão ora diminui (G1 e G3), ora se mantém constante (G2), ora cresce (G4). Os grupos 1 e 3 têm em comum a VPP pequena e os grupos 2 e 4 a VPP maior. Em G1 e G2 o VEG é pequeno e em G3 e G4 o VEG é médio. Vê-se que o fator tende a crescer se VPP e VEG crescem. Para grande QEG, a razão aumenta sensivelmente em qualquer situação.

Fig. 5.3a - EMQ/DPE-X em função de QEG

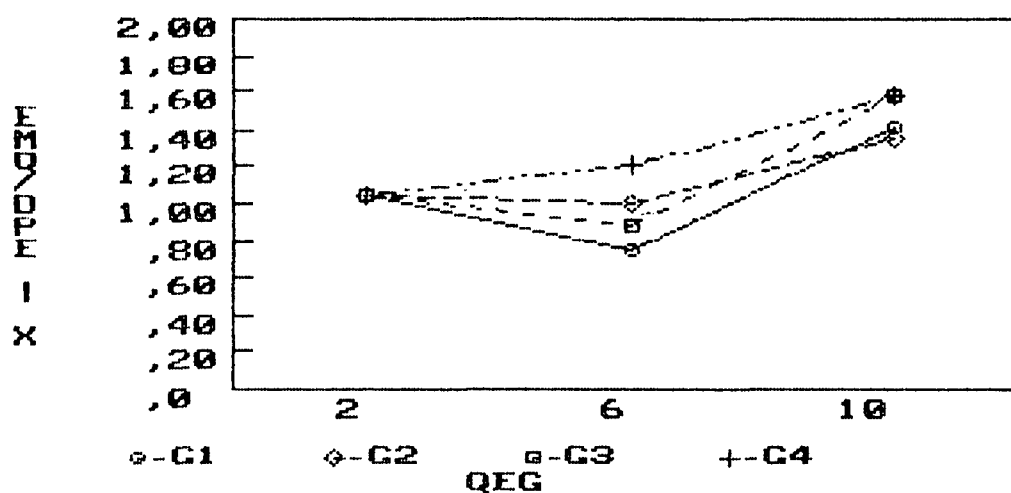


Fig. 5.3b - EMQ/DPE-Y em função de QEG

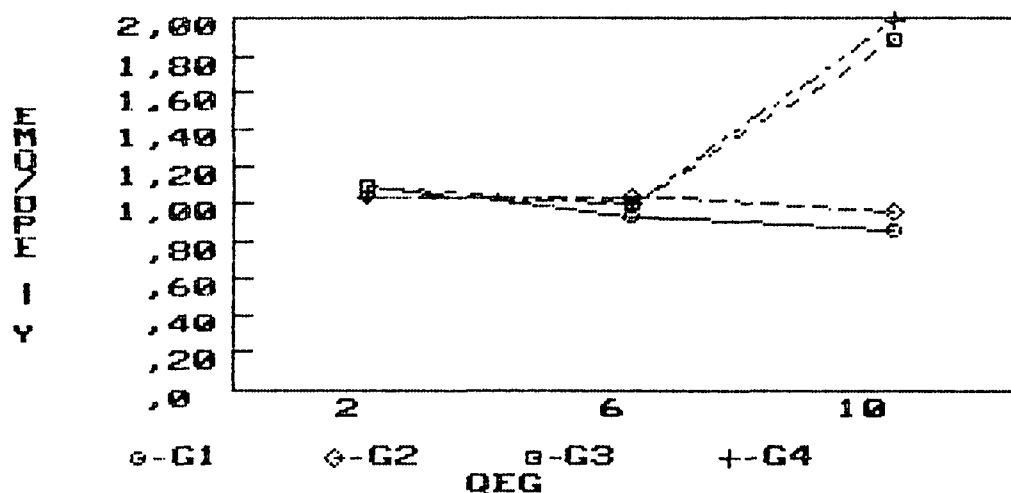
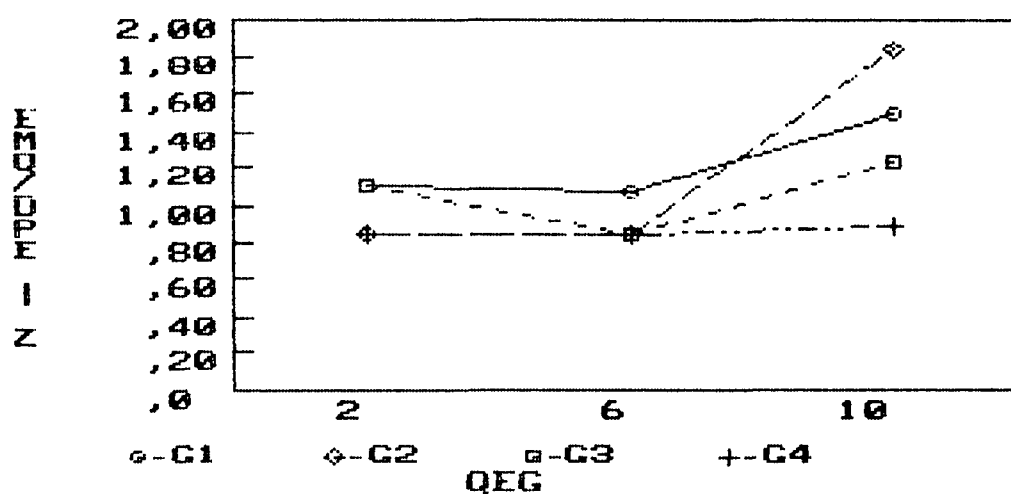


Fig. 5.3c - EMQ/DPE-Z em função de QEG



A figura 5.3b tem a mesma função da anterior, considerado o eixo Y. Para pequena e média QEG, a razão é praticamente constante e próxima de 1. Isto pode significar que a razão no eixo Y é menos suscetível às variações VEG e VPP. Para grande QEG, quando VPP é pequena a razão é conservada e quando VPP aumenta a razão cresce. Claramente, percebe-se a importância da rigidez do bloco, para atenuar a deterioração da razão EMQ/DPE, devido à QEG.

A figura 5.3c, analogamente, considera o eixo Z. Para pequena e média QEG, a razão é distribuída próxima de 1. Para grande QEG, a razão cresce no sentido de G4 -> G3 -> G1 -> G2, confundindo a interpretação, provavelmente devido à convergência sobre falsos valores.

Na tabela 5.2, percebe-se uma discrepância dos resultados de EMQ em G3B, G3C, G4B e G4C. Elas ocorrem quando VEG é médio e QEG é média ou grande, apenas para as coordenadas "planimétricas". Quanto ao DPE, chamam a atenção G3B e G4B. Em ambos, QEG é média. Estas ocorrências evidenciam que erros de proporções consideráveis (18σ) não eliminados pioram a precisão externa e também a precisão interna. Daí não ser possível visualizá-los nas figuras, pois são assimilados na razão EMQ/DPE. As colunas 2 e 3 da tabela 5.3 contribuem para esta verificação, interceptando-as com as linhas correspondentes a G3B, G3C, G4B e G4C.

Em resumo, a deterioração da precisão externa aumenta, à medida que VEG, QEG e VPP aumentam.

5.3.2.2 A razão EMQ/DPE em função do VEG

As figuras 5.4 representam a dependência da razão EMQ/DPE do VEG. As figuras superiores referem-se à VPP menor (10 m^2) e as inferiores à VPP maior (100 m^2).

A primeira vista, quando a QEG é pequena, seja maior ou menor a rigidez geométrica do bloco e considerando todos os eixos, o fator de deterioração é aproximadamente constante e em torno de 1. Portanto, o aumento do VEG não influenciou a razão EMQ/DPE, porque houve sucesso na DLAEG em todas as situações, quando $QEG=2$.

Quando a QEG é média, a razão no eixo Y é estável para aumento no VEG. Se houver maior rigidez geométrica, a razão no eixo X cresce pouco, enquanto que no eixo Z decresce pouco. A causa, provavelmente, é a correlação ou dependência funcional existente entre os eixos X e Z. Ainda, diante de média QEG e menor rigidez geométrica, a razão praticamente se mantém constante e em torno de 1. O aumento do VEG pouco influi no fator quando $QEG=6$.

Entretanto, quando há grande QEG, o incremento no VEG faz crescer a razão EMQ/DPE das coordenadas X-Y, em qualquer situação de rigidez do bloco, enquanto que, no eixo Z, o fator decresce, provavelmente, por causa da mencionada correlação.

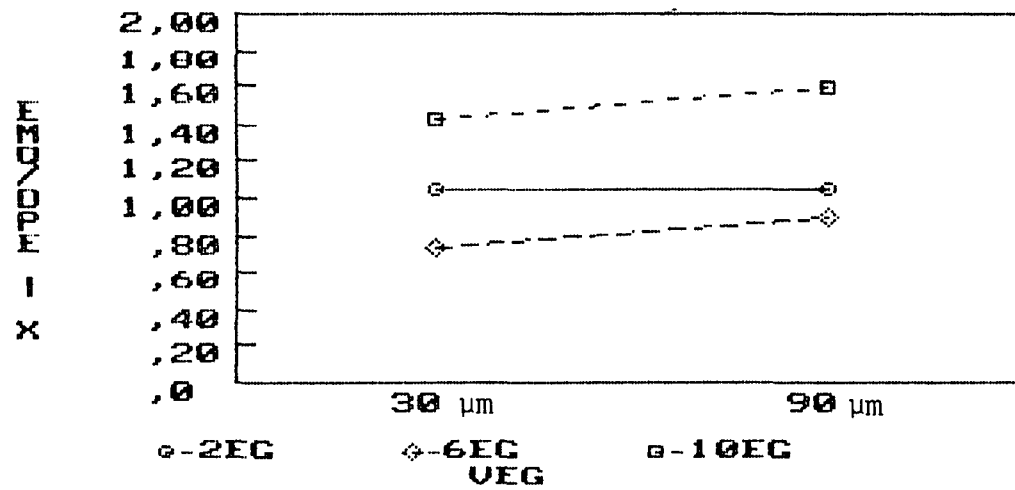
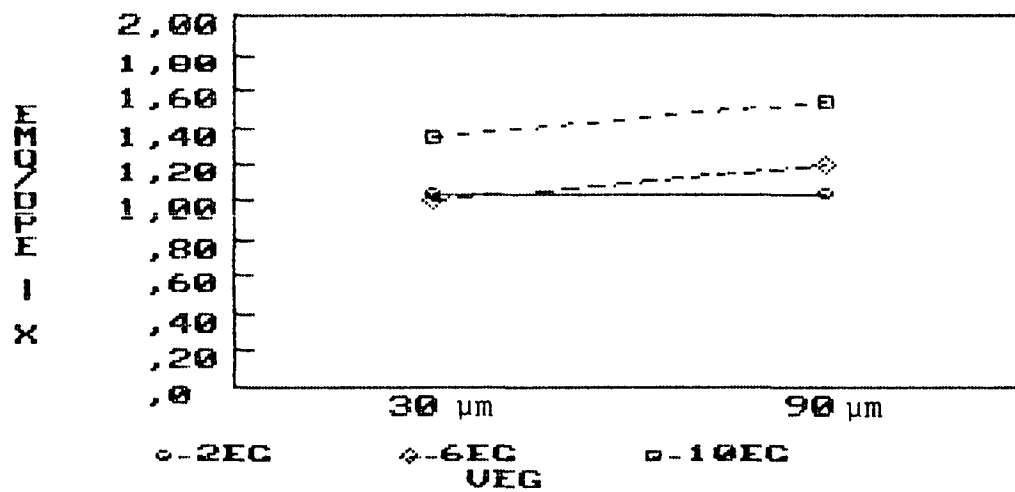
Fig. 5.4a - EMQ/DPE-X x UEG (UPP=100 m²)Fig. 5.4b - EMQ/DPE-X x UEG (UPP=100 m²)

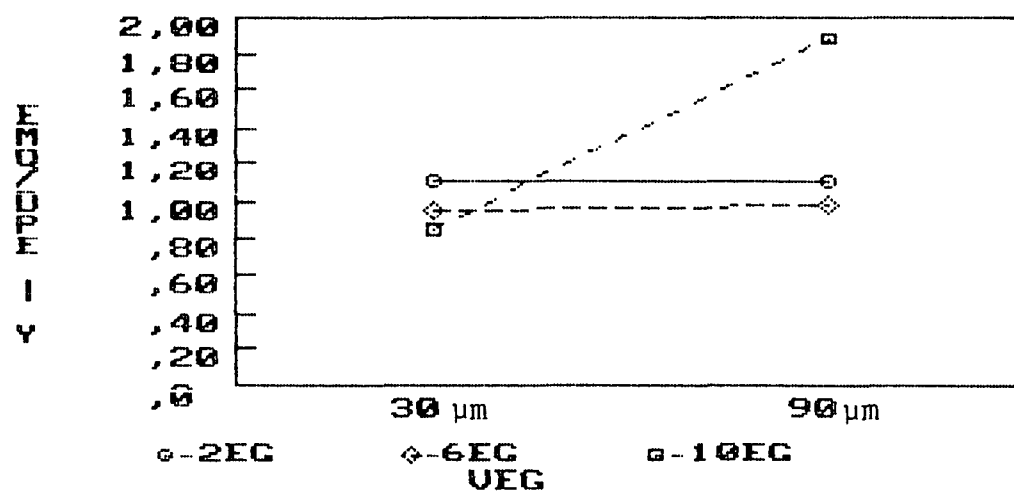
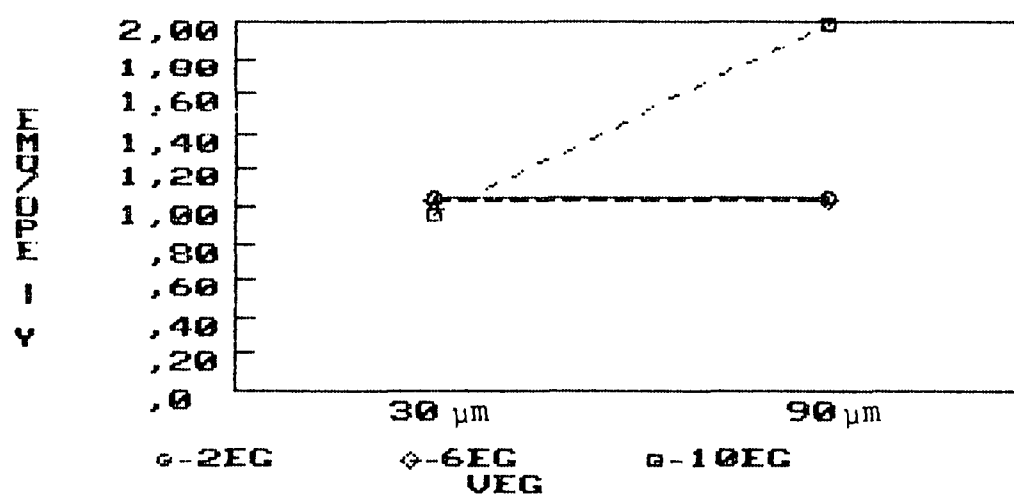
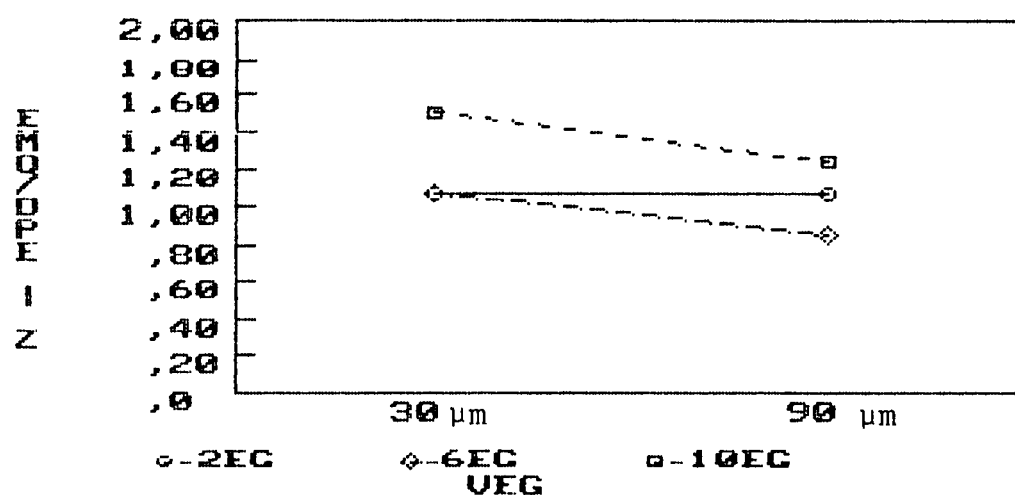
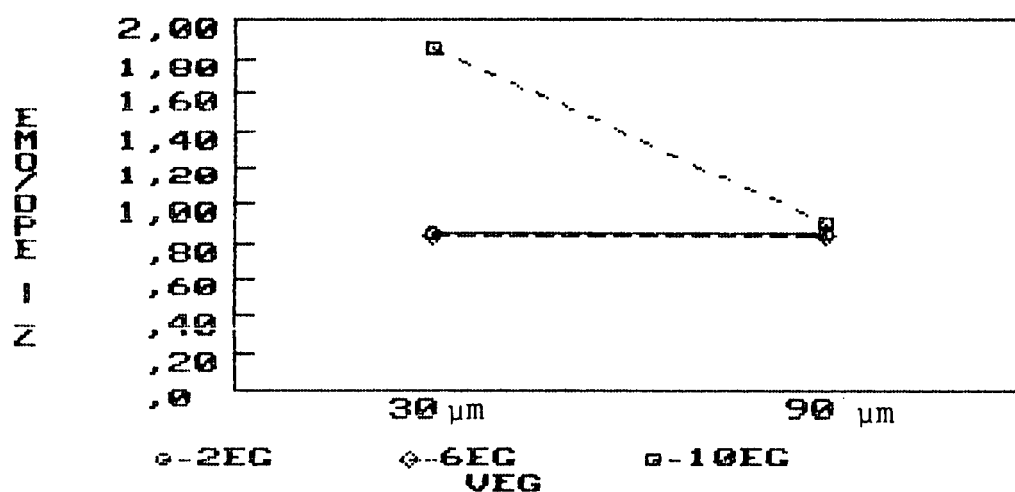
Fig. 5.4c - EMQ/DPE-Y \times UEG (UPP=10 m²)Fig. 5.4d - EMQ/DPE-Y \times UEG (UPP=100 m²)

Fig. 5.4e - EMQ/DPE-Z \times UEG (UPP=10 m²)Fig. 5.4f - EMQ/DPE-Z \times UEG (UPP=100 m²)

Repetindo, a razão EMQ/DPE assimila parcialmente os danos causados por σ não eliminados, porque estes afetam simultaneamente a precisão externa e a precisão interna. Então, o testemunho efetivo dos prejuízos é dado pela comparação dos resultados dos EMQ e DPE dos grupos G1/G3 e G2/G4. Vê-se que os experimentos G3B, G3C, G4B e G4C, já mencionados, evidenciam que a um aumento no VEG, corresponde um resultado pior da precisão externa e interna, sob qualquer situação de rigidez geométrica, desde que o algoritmo para DLAEG apresente falhas. Novamente, a tabela 5.3 comprova estas constatações.

5.3.2.3 A razão EMQ/DPE em função da VPP

As figuras 5.5 representam a dependência da razão EMQ/DPE da VPP. As figuras superiores referem-se ao $VEG=6\sigma$ e as inferiores ao $VEG=18\sigma$.

Analogamente à subseção anterior, quando QEG é pequena, seja pequeno ou médio o VEG e considerando os eixos X e Y, o fator de deterioração é aproximadamente constante e em torno de 1. No eixo Z o fator decresce pouco. Portanto, a variação da rigidez geométrica do bloco praticamente não influenciou na razão EMQ/DPE, porque houve sucesso na DLAEG em todas as situações, quando QEG=2.

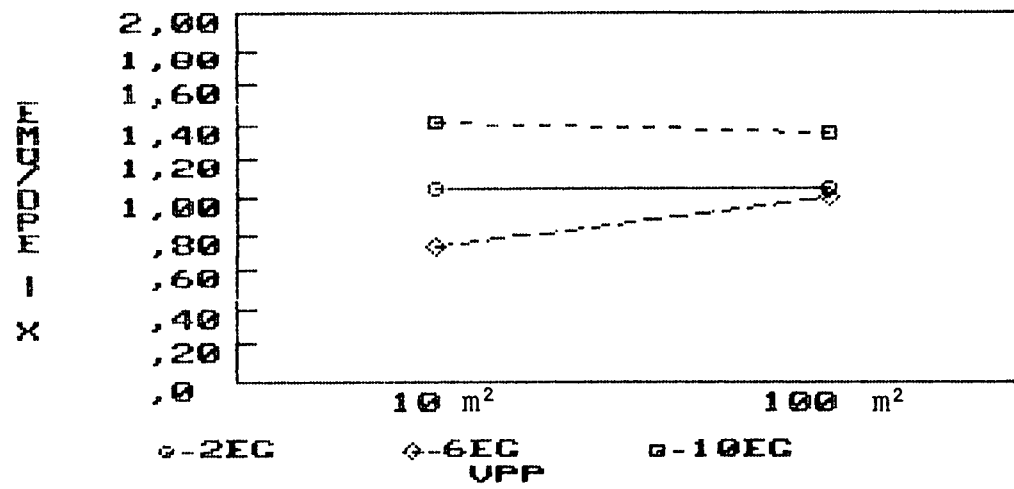
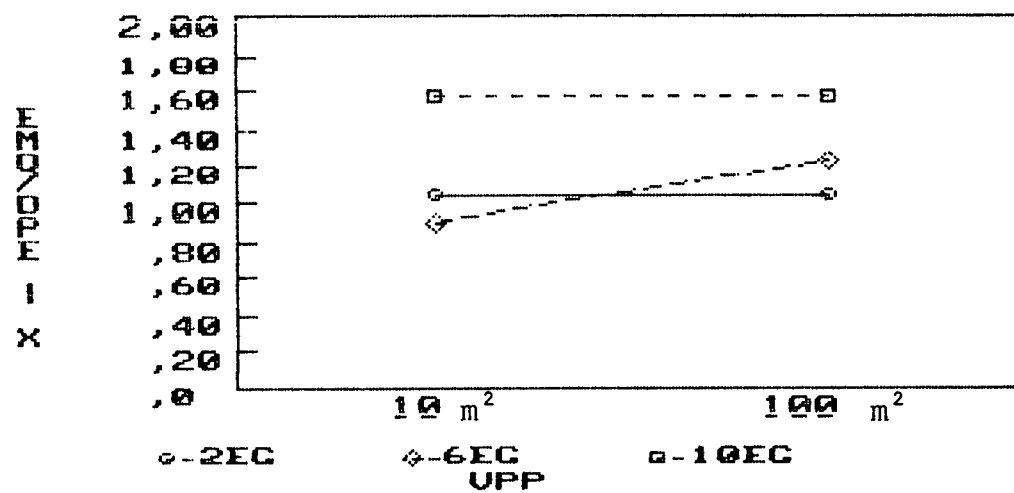
Fig. 5.5a - EMQ/DPE-X x UPP (UEG=30 μm)Fig. 5.5b - EMQ/DPE-X x UPP (UEG=90 μm)

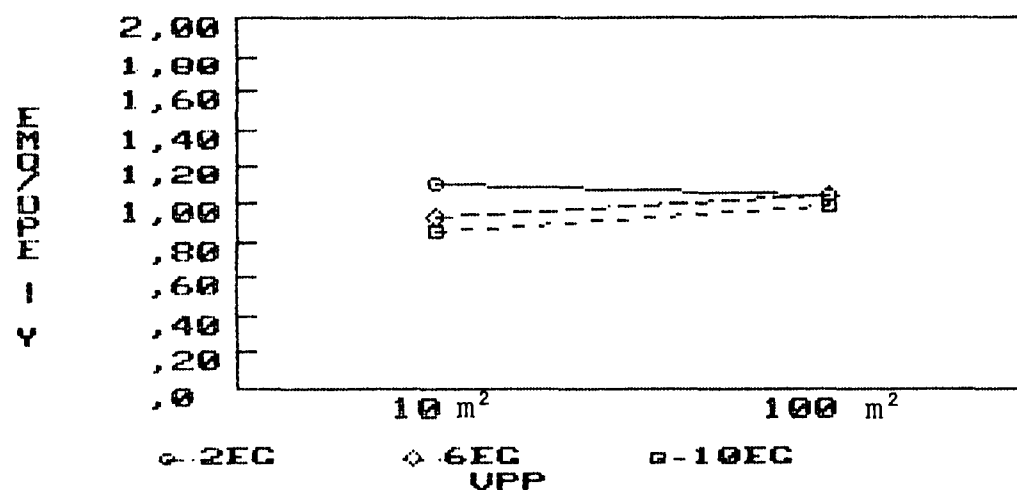
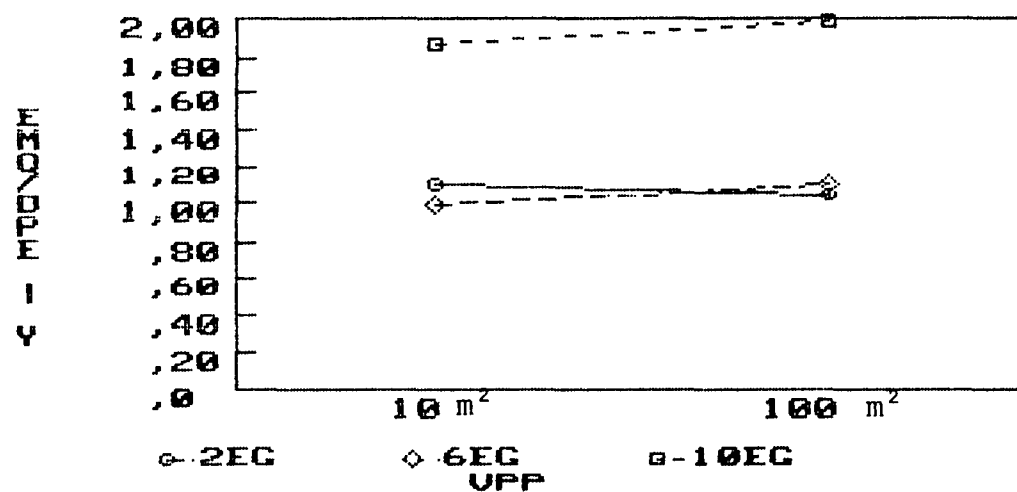
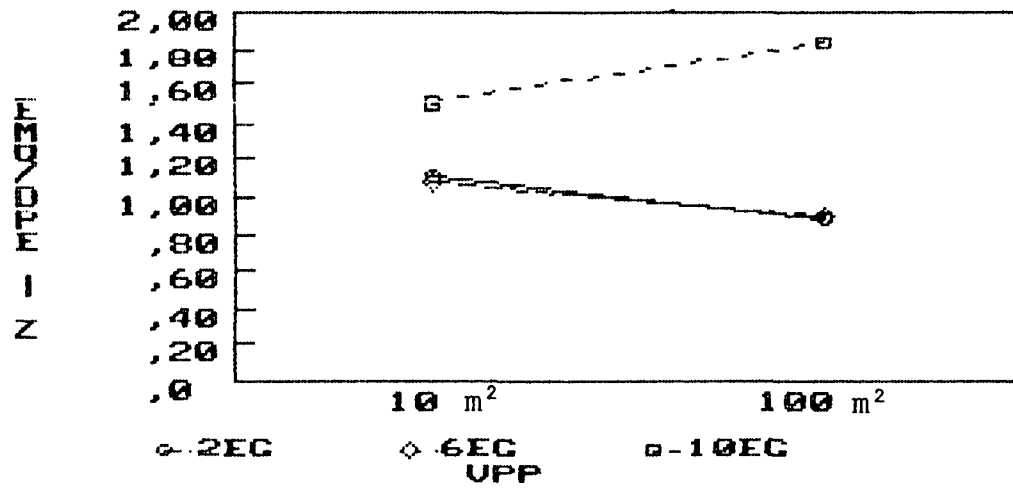
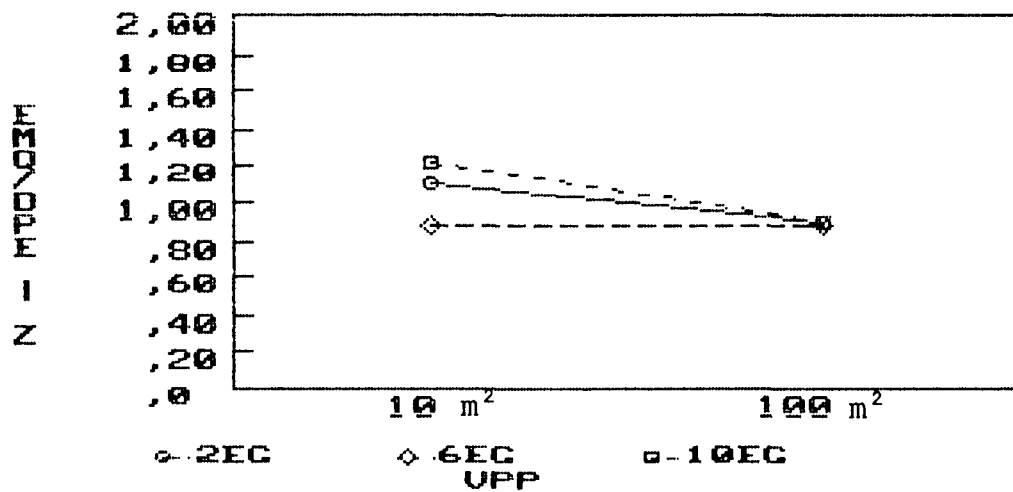
Fig. 5.5c - EMQ/DPE-Y x UPP (UEG=30 μ m)Fig. 5.5d - EMQ/DPE-Y x UPP (UEG=90 μ m)

Fig. 5.5e - EMQ/DPE-Z x UPP (UEG=30 μm)Fig. 5.5f - EMQ/DPE-Z x UPP (UEG=90 μm)

Quando a QEG é média, a razão no eixo Y é quase estável para a variação da rigidez geométrica. Se o VEG é pequeno, no eixo X o fator cresce quase 40%, enquanto que no eixo Z decresce cerca de 20%. A correlação existente entre os eixos X e Z pode ser evocada novamente para explicar. Ainda diante de média QEG e médio VEG, o fator cresce em X e permanece constante em Z.

Quando a QEG é grande, não se verificam variações significativas na razão EMQ/DPE em X e Y. Em Z, o fator se deteriora (aumenta) em quase 30%, se VEG for pequeno, e diminui cerca de 30%, se VEG for médio. Em geral, o valor da razão é maior do que nos outros casos.

A influência maior da variação da geometria do bloco recai nas precisões da coordenada Z. Ambas, externa e interna, são melhores à medida que a VPP é menor, isto é, a geometria do bloco é mais rígida. Isto pode ser visto claramente nas tabelas 5.2 e 5.3, pela comparação dos grupos G1/G2 e G3/G4. Neste particular, o VEG pouco influi no eixo Z, mas perturba sensivelmente as estimativas das coordenadas X e Y, conforme mostram G3B e G3C em comparação a G1B e G1C.

5.3.3 Resumo da discussão

A razão EMQ/DPE é um fator de deterioração da precisão externa em relação à precisão interna. Se menor do que 1, a precisão externa é melhor do que a interna, se igual a 1, se equivalem e se maior do que 1, é pior.

Em geral, o aumento da QEG de 2 para 6, isto é, de pequena para média quantidade, acarreta leve decréscimo da razão EMQ/DPE no eixo-Y e espalha a razão em torno (acima e abaixo) de 1, segundo os eixos X e Z. Para grande QEG, em geral, o fator tende a crescer, exceto no eixo Y, quando o VEG fôr pequeno.

O aumento do VEG, em geral, faz aumentar o fator em Y, principalmente quando a QEG é grande. O fator aumenta no eixo-X e diminui no eixo-Z, provavelmente devido à correlação existente.

Quando a VPP aumenta, isto é, a rigidez geométrica do bloco diminui, a razão tende a crescer em X, se a QEG fôr média. No eixo Y a razão tende a ser constante. Em relação a Z, o fator diminui, exceto quando a quantidade de pequenos eg fôr grande.

6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

A questão DLAEG preocupa a comunidade fotogramétrica internacional. A busca de estimativas imparciais e de variância mínima dos parâmetros e a melhoria da confiabilidade do sistema de fototriangulação, através da DLAEG, combinada com outros recursos (cf. 2.5), são os objetivos desta tese. A tarefa de detectar, localizar e eliminar os erros grosseiros, em ambiente de fototriangulação, deve ser conduzida sequencialmente, do maior para o menor. Um conjunto de algoritmos aplicados aos dados, que atenda a esta recomendação, recebe o nome de filtragem progressiva (cf. 2.3).

A inferência bayesiana apresenta-se como uma ferramenta para solucionar a fototriangulação, baseando-se em um certo grau de conhecimento prévio dos parâmetros, geralmente disponível após a filtragem progressiva. A coincidência prática das soluções bayesiana e do ajustamento generalizado é mostrada. A diferenciação é meramente conceitual: a inferência bayesiana assenta-se em conhecimento subjetivo e o ajustamento generalizado em conhecimento objetivo.

O método de Pope é aplicado aos resíduos, após solução bayesiana, para a DLAEG. Trata-se de um teste estatístico aproximado, pois opera com valores médios.

6.1 Conclusões

Com base nas investigações realizadas, conclui-se que:

6.1.1 A inferência bayesiana permite suspender temporariamente a necessidade dos pontos-de-controle. O benefício maior desta possibilidade é a análise dos resíduos de fotocoordenadas sem a influência dos pontos-de-controle e seus prováveis erros grosseiros.

6.1.2 Sob a ocorrência de mínima quantidade de pontos de controle, a inferência bayesiana contribui para estabelecer a rigidez geométrica da rede e controlar parcialmente os erros das estimativas de coordenadas-Z de pontos-objeto.

6.1.3 Os parâmetros de posição do centro perspectivo da câmara (foto) são dominantes em relação aos de orientação. Isto significa que pode haver maior eficiência na solução bayesiana, se as coordenadas X_c, Y_c, Z_c dos centros perspectivos tiverem melhor conhecimento prévio.

6.1.4 O método de Pope é eficiente na DLAEG, se a quantidade de erros grosseiros for pequena (cerca de 1,3%). A maneira que o método de Pope foi implementado neste trabalho, representa a automatização da idéia de rejeitar a observação associada ao maior resíduo, em um processo repetitivo.

6.1.5 As precisões externa (EMQ) e interna (DPE) são piores, à medida que aumentam, principalmente, a QEG e a VPP. Estes acréscimos podem influenciar a razão EMQ/DPE, quando as precisões variarem diferentemente. Daí, a confiabilidade da fototriangulação sob a inferência bayesiana ser principalmente influenciadas pelas características QEG e VPP.

6.1.6 Embora a solução da fototriangulação possa indicar alta confiabilidade interna (maior resíduo remanescente de 1 a 2σ), se o algoritmo de detecção falhar, esta será uma falsa informação.

6.1.7 As precisões externa e interna referentes à "altimetria" tendem a se conservarem, se a rigidez geométrica do bloco for maior, isto é, VPP menor, independente da QEG e VEG. O mesmo vale na ausência de erros grosseiros.

6.2 Recomendações

Com base nas investigações realizadas, recomenda-se:

6.2.1 Recorrer à utilização da inferência bayesiana, quando houver algum conhecimento prévio relevante a respeito dos parâmetros.

6.2.2 Sempre que possível, ponderar os parâmetros de posição (translação) do centro perspectivo da câmara.

6.2.3 Empregar a inferência bayesiana após a filtragem progressiva e em conjunto com um método para DLAEG de fotocoordenadas (p.ex. método de Pope).

6.2.4 Investigar a aplicação da inferência bayesiana em conjunto com o algoritmo de Pope e estimativa robusta, para a DLAEG, tal que $\sigma_{v_i} = f(p_i)$ e $p_i = g(v_i)$.

6.2.5 Estudar a variação da VUP "a priori" dos parâmetros, σ_x^2 , para compatibilizar a relação entre os pesos de parâmetros e de fotocoordenadas. Idem para σ_0^2 .

6.2.6 Melhorar as soluções aproximadas para as estimativas de C_x , $\hat{\sigma}_0^2$ e $\hat{\sigma}_x^2$, a fim de se obter melhor estimativa sobre a precisão externa.

APÊNDICE A

Demonstração da expressão (2.1):

Seja o modelo funcional não-linear

$$l_a = F(x_a)$$

tal que, após a linearização, torna-se

$$y = Ax + l \quad (A1)$$

Impondo a condição de mínimos quadrados $y'Py \rightarrow \min$, a solução é

$$x = -N^{-1}A'Pl \quad , \quad P = \sigma_0^2 C_{lb}^{-1} \quad (A2)$$

$$(A2) \rightarrow (A1) : y = l - AN^{-1}A'Pl = (I - AN^{-1}A'P)l \quad (A3)$$

$$\text{Sabendo-se que } l = l_0 - l_b \Rightarrow C_l = C_{lb} = C \quad (A4)$$

$$\text{De (A2)} \quad C = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (A5)$$

(A4) \rightarrow (A3) com a Lei de Propagação de Covariâncias

$$C_V = (I - AN^{-1}A'P).C.(I - AN^{-1}A'P)'$$

Desenvolvendo, chega-se a

$$C_V = (I - AN^{-1}A'P).C$$

$$C_V.C^{-1} = (I - AN^{-1}A'P) \quad (A6)$$

$$(A6) \rightarrow (A3) : \underline{v} = C_V.C^{-1}.1 \quad , \quad C^{-1} = P/\sigma_0^2$$

$$\underline{v} = C_V.(P/\sigma_0^2).1 \quad , \quad Q_{VV} = C_V/\sigma_0^2$$

$$\underline{v} = Q_{VV}.P.1 \quad (2.1)$$

$$(\underline{v}+d\underline{v}) = Q_{VV}.P.(1+d1) \quad (2.2)$$

$$d\underline{v} = Q_{VV}.P.d1$$

APÊNDICE B

Demonstração das soluções do ajustamento generalizado (SCHMID & SCHMID 1471), cf. 3.2:

Inicialmente, sob a consideração de que "todas as variáveis são observações".

Seja o modelo funcional não-linear

$$F(l_a) = 0 \quad (B1)$$

tal que, após linearizado, torna-se

$$B.y + w = 0 \quad (B2)$$

Impondo a condição de mínimos quadrados $y'Py \rightarrow \min$.
e usando os multiplicadores de Lagrange

$$F = y'Py - 2k'(By + w) \rightarrow \min. \quad P = \sigma_0^2 \cdot C_\ell^{-1} \quad (B3)$$

$$F/ y = 2Py - 2B'k = 0 \rightarrow Py - B'k = 0 \quad (B4)$$

$$F/ k' = By + w = 0 \quad (B5)$$

$$\text{De (B4) obtém-se : } y = P^{-1}B'k \quad (B6)$$

$$(B6) \rightarrow (B5) : B(P^{-1}B'k) + w = 0 \rightarrow k = - (BP^{-1}B')^{-1}w \quad (B7)$$

$$(B7) \rightarrow (B6) : y = - P^{-1}B'(BP^{-1}B')^{-1}w \quad (B8)$$

Solução sob a condição de que "dispõe-se de um conhecimento prévio a respeito dos parâmetros", o qual é incorporado na forma de injunções de peso.

Seja o modelo funcional não-linear

$$l_a = F(x_a) \quad e \quad G(x_a) = 0 \quad (B9)$$

tal que, após linearizado, torna-se

$$y = Ax + l \quad e \quad \frac{y}{x} = x + \frac{l}{x} \quad (B10)$$

Impondo a condição de mínimos quadrados $y'Py \rightarrow \min$.
e usando os multiplicadores de Lagrange

$$F = y'Py + \frac{y}{x}'P_x \frac{y}{x} - 2k'(Ax + l - y) - 2k'_x(x + \frac{l}{x} - \frac{y}{x}) \rightarrow \min.$$

$$P = \sigma_0^2 \cdot C_\ell^{-1} \quad P_x = \sigma_0^2 \cdot C_{xb}^{-1}$$

$$\partial F / \underline{v} = 2P\underline{v} + 2\underline{k} = 0 \quad \rightarrow \quad P\underline{v} + \underline{k} = 0 \quad (B11)$$

$$\partial F / \underline{v}_X = 2P_X \underline{v}_X + 2\underline{k}_X = 0 \quad \rightarrow \quad P_X \underline{v}_X + \underline{k}_X = 0 \quad (B12)$$

$$\partial F / \underline{k}' = A\underline{x} + \underline{1} - \underline{v} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{v} = A\underline{x} + \underline{1} \quad (B13)$$

$$\partial F / \underline{k}'_X = \underline{x} + \underline{1}_X - \underline{v}_X = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{v}_X = \underline{x} + \underline{1}_X \quad (B14)$$

$$\partial F / \underline{x} = -2A' \underline{k} - 2\underline{k}_X = 0 \quad \rightarrow \quad A' \underline{k} + \underline{k}_X = 0 \quad (B15)$$

de (B11) e (B12), respectivamente

$$\underline{v} = - P^{-1} \underline{k} \quad (B16)$$

$$\underline{v}_X = - P_X^{-1} \cdot \underline{k}_X \quad (B17)$$

(B16) e (B17) \rightarrow (B13) e (B14), respectivamente

$$- P^{-1} \underline{k} = A\underline{x} + \underline{1} \quad \rightarrow \quad \underline{k} = - P(A\underline{x} + \underline{1}) \quad (B18)$$

$$- P_X^{-1} \cdot \underline{k}_X = \underline{x} + \underline{1}_X \quad \rightarrow \quad \underline{k}_X = - P_X (\underline{x} + \underline{1}_X) \quad (B19)$$

$$(B18) \text{ e } (B19) \rightarrow (B15) : A' P(A\underline{x} + \underline{1}) + P_X (\underline{x} + \underline{1}_X) = 0$$

$$A' P A \underline{x} + P_X \cdot \underline{x} + A' P \underline{1} + P_X \cdot \underline{1}_X = 0$$

$$(A' P A + P_X) \underline{x} = -(A' P \underline{1} + P_X \cdot \underline{1}_X)$$

$$\underline{x} = - (A' P A + P_X)^{-1} \cdot (A' P \underline{1} + P_X \cdot \underline{1}_X)$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 11 ACKERMANN, F.E. On the development in the field of ISP-Comission III during 1972-1976. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF PHOTOGRAMMETRY, 13., Helsinki, 1976. International Archives... Helsinki, International Society for Photogrammetry, 1976. p.3-12.
- 1 21 _____. Report of working group III/1: identification and elimination of gross and systematic errors. In.: SYMPOSIUM MATHEMATICAL MODELS, ACCURACY ASPECTS AND QUALITY / CONTROL, Otaniemi, 1982. Proceedings... Otaniemi, Helsinki University of Technology, 1982. p.9-11.
- 1 31 _____. Report on the activities of Working Group III/1 during 1980-84. In.: INTERNATIONAL CONGRESS OF PHOTOGRAMMETRY AND REMOTE SENSING, 15., Rio de Janeiro, 1984. International Archives... Rio de Janeiro, International Society of Photogrammetry and Remote Sensing, 1984. v.25, t.A3a, p.10-5.
- 1 41 BAYES, T. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. Biometrika, 45:293-315. 1958.
- 1 51 BEKMAN, O.R. & COSTA NETO, P.L.O. Análise estatística da decisão. São Paulo, Edgard Blucher, 1980. 124p.
- 1 61 BOSMAN, E.R. Some general remarks about the use of parametric and nonparametric statistical tests. Photogrammetria. s.l., Elsevier, 25(2,3):99-105, dez., 1969.
- 1 71 BOSSLER, J.D. Bayesian inference in geodesy. s.l. 1972. 79p. Tese, Doutorado. The Ohio State University.
- 1 81 CAMP, S.T. & BRULAND, R.V. The role of inertial navigation in aerial survey and photogrammetry. In.: NATIONAL CARTOGRAPHY CONGRESS, 5., Neuquen, 1978. Paper... s.l., s.ed., 1978. 27p.
- 1 91 CERVO, A.L. & BERVIAN, P.A. Metodologia científica: para uso dos estudantes universitários. 2.ed. São Paulo, McGraw-Hill, 1978. 144p.
- 1101 CORTEN, F.L.J.H. Performance of navigation systems and of sensor orientation systems in aerial survey. In.: INTERNATIONAL CONGRESS OF PHOTOGRAMMETRY AND REMOTE SENSING, 15., Rio de Janeiro, 1984. International Archives... Rio de Janeiro, International Society of Photogrammetry and Remote Sensing, 1984. v.25, t.A3a, p.37-51.
- 1111 _____. Applications of navigation systems and of sensor orientation systems in survey navigation, in aerial triangulation and in establishment of control. In.: INTERNATIONAL CONGRESS OF PHOTOGRAMMETRY AND REMOTE

- SENSING, 15., Rio de Janeiro, 1984. *International Archives...* Rio de Janeiro, International Society of Photogrammetry and Remote Sensing, 1984. v.25, t.A3a, p.26-36.
- 1121 EL-HAKIM, S.F. A practical study of gross-error detection in bundle adjustment. *The Canadian Surveyor*, 35 (4):373-86, December 1981.
- 1131 _____. Data snooping with weighted observations. In.: SYMPOSIUM MATHEMATICAL MODELS, ACCURACY ASPECTS AND QUALITY CONTROL, Otaniemi, 1982. *Proceedings...* Otaniemi, Helsinki University of Technology, 1982. p.126-33.
- 1141 _____. Data snooping with weighted observations; discussion. In.: SYMPOSIUM MATHEMATICAL MODELS, ACCURACY ASPECTS AND QUALITY CONTROL, Otaniemi, 1982. *Supplement to the proceedings...* Otaniemi, Helsinki University of Technology, 1982. p.36-9.
- 1151 EL-HAKIM, S.F. & ZIEMANN, H. A step by step strategy for gross error detection. In.: SYMPOSIUM MATHEMATICAL MODELS, ACCURACY ASPECTS AND QUALITY CONTROL, Otaniemi, 1982. *Proceedings...* Otaniemi, Helsinki University of Technology, 1982. p.145-53.
- 1161 FORSTNER, W. The theoretical reliability of photogrammetric coordinates. In.: INTERNATIONAL CONGRESS OF PHOTOGRAMMETRY AND REMOTE SENSING, 14., Hamburg, 1980. *International Archives...* Hamburg, International Society of Photogrammetry and Remote Sensing, 1980. v.23, t.B3, p.223-35.
- 1171 _____. Data snooping in aerial triangulation; discussion. In.: SYMPOSIUM MATHEMATICAL MODELS, ACCURACY ASPECTS AND QUALITY CONTROL, Otaniemi, 1982. *Supplement to the proceedings...* Otaniemi, Helsinki University of Technology, 1982. p.32-4.
- 1181 _____. Results of the Test 1 on gross error detection of ISP WG III/1 and OEEPE Commission A. In.: SYMPOSIUM MATHEMATICAL MODELS, ACCURACY ASPECTS AND QUALITY CONTROL, Otaniemi, 1982. *Proceedings...* Otaniemi, Helsinki University of Technology, 1982. p.190-201.
- 1191 _____. Results of Test 2 on gross error detection of ISP WG III/1 and OEEPE. In.: INTERNATIONAL CONGRESS OF PHOTOGRAMMETRY AND REMOTE SENSING, 15., Rio de Janeiro, 1984. *International Archives...* Rio de Janeiro, International Society of Photogrammetry and Remote Sensing, 1984. v.25, t.A3a, p.220-33.
- 1201 FRASER, C.S. Optimization of precision in close-range photogrammetry. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 48(4):561-70, April 1982.

- 1211 GEMAEL, C. Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas. s.l., Diretório Acadêmico do Setor de Tecnologia, 1984. 205p.
- 1221 GRUN, A. Internal reliability models for aerial bundle systems. In.: INTERNATIONAL CONGRESS OF PHOTOGRAMMETRY AND REMOTE SENSING, 14., Hamburg, 1980. International Archives... Hamburg, International Society of Photogrammetry and Remote Sensing, 1980. v.23, t.B3, p.273-83.
- 1231 _____. The accuracy potential of the modern bundle block adjustment in aerial photogrammetry. Photogrammetry Engineering and Remote Sensing, 48(1):45-54, January 1982.
- 1241 GUTTMAN, I. Care and handling of univariate or multivariate outliers in detecting spuriousity: a bayesian approach. Technometrics, 15(4):723-38, 1973.
- 1251 HAMILTON, W.C. Statistics in physical science. New York, Ronald, 1964. 230p.
- 1261 HOGG, R.V. & CRAIG, A.T. Estimation. In.: _____. Introduction to the mathematical statistics. 4.ed. New York, Macmillan, 1978. p.200-34.
- 1271 JACOBSEN, K. Experiences in blunder detection for aerial triangulation. In.: INTERNATIONAL CONGRESS OF PHOTOGRAMMETRY AND REMOTE SENSING, 15., Rio de Janeiro, 1984. International Archives... Rio de Janeiro, International Society of Photogrammetry and Remote Sensing, 1984. v.25, t.A3a, p.440-6.
- 1281 JORGENSEN, P.C. et alii. Ah, robust estimation. In.: INTERNATIONAL CONGRESS OF PHOTOGRAMMETRY AND REMOTE SENSING, 15., Rio de Janeiro, 1984. International Archives... Rio de Janeiro, International Society of Photogrammetry and Remote Sensing, 1984. v.25, t.A3a, p.268-77.
- 1291 JUHL, J. The "danish method" of weight reduction for gross error detection. In.: INTERNATIONAL CONGRESS OF PHOTOGRAMMETRY AND REMOTE SENSING, 15., Rio de Janeiro, 1984. International Archives... Rio de Janeiro, International Society of Photogrammetry and Remote Sensing, 1984. v.25, t.A3a, p.468-72.
- 1301 KOCH, K.R. Statistical analysis of geodetic data with applications for the deformation analysis. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1985. 125p.
- 1311 KRAKIWSKY, E.J. A synthesis of recent advances in the method of least squares. Fredericton, University of New Brunswick, 1975. 125p.

- 1321 KRARUP, T., JUHL, J. & KUBIK, K. Gotterdammerung over least squares adjustment. In.: INTERNATIONAL CONGRESS OF PHOTOGRAMMETRY AND REMOTE SENSING, 14., Hamburg, 1980. *International Archives...* Hamburg, International Society of Photogrammetry and Remote Sensing, 1980. v.23, t.B3, p.369-78.
- 1331 KRARUP, T. & KUBIK, K. The danish method for adjustment; discussion. In.: SYMPOSIUM MATHEMATICAL MODELS, ACCURACY ASPECTS AND QUALITY CONTROL, Otaniemi, 1982. *Supplement to the proceedings...* Otaniemi, Helsinki University of Technology, 1982. p.26-9.
- 1341 KUBIK, K. et alii. Oh, grosserorors! In.: INTERNATIONAL CONGRESS OF PHOTOGRAMMETRY AND REMOTE SENSING, 15., Rio de Janeiro, 1984. *International Archives...* Rio de Janeiro, International Society of Photogrammetry and Remote Sensing, 1984. v.25, t.A3a, p.278-89.
- 1351 LIPSCHUTZ, S. *Teoria e problemas de probabilidade*. 2. ed. São Paulo, McGraw-Hill, 1972. 228p.
- 1361 LUGNANI, J.B. *Introdução à fototriangulação*. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, 1987. 134p.
- 1371 LUGNANI, J.B. & MITISHITA, E. Improvements in gross error detection in aerialtriangulation. In.: INTERNATIONAL CONGRESS OF PHOTOGRAMMETRY AND REMOTE SENSING, 15., Rio de Janeiro, 1984. *International Archives...* Rio de Janeiro, International Society of Photogrammetry and Remote Sensing, 1984. v.25, t.A3a, p.657-62.
- 1381 _____. Combination of progressive gross error detection with robust estimation on a quasi on line detection in aerialtriangulation. In.: SYMPOSIUM FROM ANALYTICAL TO DIGITAL, Rovaniemi, 1986. *Proceedings...* Espoo, Helsinki University of Technology, 1986. p.442-58.
- 1391 MERCHANT, D.C. *Analytical photogrammetry: theory and practice*. 2.ed. s.l. The Ohio State University, 1979. 2v.
- 1401 MIKHAIL, E.M. *Observations and least squares*. New York, DunDonnelley, 1976. 497p.
- 1411 MITISHITA, E.A. *Deteccão de erros grosseiros nas aerotriangulações*; Curitiba, 1986. 245p. Dissertação, mestrado. Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas.
- 1421 _____. *Deteccão de erros grosseiros em pontos de controle plani-altimétricos para aerotriangulação*. *Revista Brasileira de Cartografia*. Rio de Janeiro, (40):27-35, jun. 1986.

- 1431 MOFFITT, F.H. & MIKHAIL, E.M. Photogrammetry. 3.ed. New York, Harper&Row, 1980. 648p.
- 1441 POPE, A.J. The statistics of residuals and the detection of outliers. NOAA Technical Report NOS 65 NOS 1:1-133, 1976.
- 1451 ROSIER, F.A. Propriedades dos estimadores de parâmetros de distribuições de probabilidades. Curitiba, 1986. 22p. Monografia (manuscrito). Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas.
- 1461 SALOMON, D.V. Como fazer uma monografia: elementos de metodologia de trabalho científico. 6.ed. Belo Horizonte, Interlivros, 1978. 317p.
- 1471 SCHMID, H.H. & SCHMID, E. A generalized least squares solution for hybrid measuring systems. The Canadian Surveyor, 19(1):27-41, 1965.
- 1481 SPRENT, P. Statistics in action. Middlesex, Penguin, 1977. 240p.
- 1491 _____. Quick statistics: an introduction to non-parametric methods. Middlesex, Penguin, 1981. 264p.
- 1501 STAA, A.v. Engenharia de programas. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1983. 286p.
- 1511 STEFANOVIC, P. Pitfalls in blunder detection techniques. In.: INTERNATIONAL CONGRESS OF PHOTOGRAMMETRY AND REMOTE SENSING, 14., Hamburg, 1980. International Archives... Hamburg, International Society of Photogrammetry and Remote Sensing, 1984. v.25, t.A3a, p.10-5.
- 1521 VANICEK, P. & KRAKIWSKY, E.J. Assessment of results. In.: _____. Geodesy: the concepts. Amsterdam, North-Holland, 1982. p.214-41.
- 1531 _____. Formulation and solving of problems. In.: _____. Geodesy: the concepts. Amsterdam, North-Holland, 1982. p.242-83.
- 1541 VELOSO, P. et alli. Estruturas de dados. 3.ed. Rio de Janeiro, Campus, 1985. 228p.
- 1551 WERNER, H. Automatic gross error detection by robust estimators. In.: INTERNATIONAL CONGRESS OF PHOTOGRAMMETRY AND REMOTE SENSING, 15., Rio de Janeiro, 1984. International Archives... Rio de Janeiro, International Society of Photogrammetry and Remote Sensing, 1984. v.25, t.A3a, p.1101-8.
- 1561 WONNACOTT, T. & WONNACOTT, R. Introductory statistics. 3.ed. New York, John Wiley, 1977. 650p.